Suites numériques

Une suite **arithmétique** ajoute toujours la même raison ; une suite **géométrique** multiplie toujours par la même raison.

Définition — suite

Une suite (u_n) associe à chaque entier n un réel u_n. Elle peut être définie **explicitement** ($u_n = 3n^2 - 1$) ou **par récurrence** ($u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$).

Définition — sens de variation

(u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$. Méthodes : signe de $u_{n+1} - u_n$; comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si $u_n > 0$; variations de f si $u_n = f(n)$.

Suites arithmétiques

Théorème — suite arithmétique de raison r

$u_{n+1} = u_n + r$. Terme général : $u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r$. Croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$. Somme :

$$u_0 + u_1 + [\text{raiseox?}]3. .[\text{hspacce?}]1. + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \quad 1 + 2 + [\text{raiseox?}]3. .[\text{hspacce?}]1. + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Théorème — suite géométrique de raison q

$u_{n+1} = q\, u_n$. Terme général : $u_n = u_0\, q^n = u_p\, q^{n-p}$. Si $u_0 > 0$ et $q > 1$: croissante ; $0 < q < 1$: décroissante ; $q < 0$: non monotone. Somme, pour $q \neq 1$:

$$u_0 + u_1 + [\text{raiseox?}]3. .[\text{hspacce?}]1. + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad 1 + q + [\text{raiseox?}]3. .[\text{hspacce?}]1. + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple

Un capital de 1000 € placé à $3\ \%$: $C_n = 1000 \times 1{,}03^n$, suite géométrique de raison $1{,}03$. $C_{10} \approx 1343{,}92$ €.

À retenir

Une suite arithmétique se représente par des points **alignés** ; on démontre qu'une suite est géométrique en calculant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en trouvant une constante.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre suite arithmétique et géométrique ?

Arithmétique : on ajoute toujours la même raison r, $u_n = u_0 + nr$. Géométrique : on multiplie par la même raison q, $u_n = u_0 q^n$.

Comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ?

$S = \text{nombredetermes} \times \frac{\text{premier}+\text{dernier}}{2}$; en particulier $1+2+[\backslash\text{raiseox?}]3.\,.[\backslash\text{hspacce?}]1.+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Comment calculer la somme des termes d'une suite géométrique ?

$1+q+q^2+[\backslash\text{raiseox?}]3.\,.[\backslash\text{hspacce?}]1.+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$.

Comment montrer qu'une suite est croissante ?

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$; pour une suite à termes strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.