Suites : récurrence et limites

La **récurrence** démontre une propriété pour tout entier ; les **théorèmes de comparaison** et de **convergence monotone** donnent les limites.

Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété. Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité**), alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Définition — limites

$\lim u_n = \ell$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. $\lim u_n = +\infty$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. Une suite convergente a une unique limite.

Propriété — limites usuelles

$\lim n^k = +\infty$ ($k>0$), $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, $\lim \sqrt{n} = +\infty$. Pour q^n : $\lim q^n = +\infty$ si $q>1$; $=0$ si $-1<q<1$; $=1$ si $q=1$; pas de limite si $q \leq -1$.

Propriété — opérations

Somme, produit, quotient de limites : règles usuelles avec formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. On lève l'indétermination en factorisant par le terme dominant.

Théorème — comparaison

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- **Gendarmes** : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, alors $\lim w_n = \ell$.

Théorème — convergence monotone

Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite décroissante et minorée converge. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Méthode — suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$

On cherche le point fixe $\ell = a\ell + b$, puis $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a : $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment rédiger un raisonnement par récurrence ?

Initialisation : on vérifie $P(n_0)$. Hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un entier n et on montre $P(n+1)$. Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Comment montrer qu'une suite converge ?

Souvent avec le théorème de convergence monotone (croissante et majorée), le théorème des gendarmes, ou en calculant directement la limite d'une forme explicite.

Quelles sont les limites de q^n ?

Si $q>1$, $q^n \to +\infty$; si $-1<q<1$, $q^n \to 0$; si $q=1$ la suite est constante ; si $q \leq -1$ elle n'a pas de limite.

Que dit le théorème des gendarmes ?

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si u_n et w_n tendent vers la même limite ℓ, alors $v_n \to \ell$.