Séries numériques

Pour une série à termes positifs, tout se ramène à une **comparaison** avec une série de référence (géométrique, Riemann).

Définition — série, convergence

La série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge ; sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et son reste $R_n = S - S_n \to 0$. Condition nécessaire : $u_n \to 0$ (sinon divergence grossière). Lien suite-série : (u_n) converge ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Propriété — séries de référence

Géométrique : $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$, somme $\frac{1}{1-q}$. **Riemann** : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). Exponentielle : $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Théorème — séries à termes positifs

Convergence ssi les sommes partielles sont majorées. Si $0 \le u_n \le v_n$ et $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge. Si $u_n \sim v_n$ (ou $u_n = O(v_n)$), $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. **Règle de d'Alembert** : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, convergence si $\ell < 1$, divergence si $\ell > 1$. Règle $n^\alpha u_n \to 0$ avec $\alpha > 1 \Rightarrow$ convergence.

Théorème — convergence absolue, séries alternées

$\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge (réciproque fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$). **Critère spécial des séries alternées** : si (a_n) décroît vers 0, $\sum (-1)^n a_n$ converge, son reste est majoré par $|a_{n+1}|$ et du signe du premier terme négligé.

Théorème — comparaison série-intégrale

Pour f continue par morceaux, positive, décroissante sur $[n_0, +\infty[$: $\sum f(n)$ et $\int_{\cdot}^{+\infty} f$ sont de même nature, et $\int_{n}^{n+1} f \le f(n) \le \int_{n-1}^{n} f$ (encadrement des sommes partielles et des restes). Exemples : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$; $\sum_{k>n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

Propriété — sommation des relations de comparaison, produit de Cauchy

Si $u_n \sim v_n > 0$: en cas de convergence les restes sont équivalents, en cas de

divergence les sommes partielles le sont. **Produit de Cauchy** de deux séries absolument convergentes : $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ converge absolument et $\sum w_n = \left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right)$. **Stirling** : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment étudier la convergence d'une série à termes positifs ?

Par comparaison ou équivalence avec une série de référence (Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, géométrique), ou par la règle de d'Alembert.

Une série peut-elle converger sans converger absolument ?

Oui, comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$: elle est semi-convergente (critère des séries alternées).

Qu'est-ce que la comparaison série-intégrale ?

Pour f positive décroissante, $\sum f(n)$ et $\int_{f}^{+\infty}$ ont même nature, et l'encadrement $\int_{n}^{n+1} f \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f$ permet d'estimer sommes partielles et restes.

Quelle est la formule de Stirling ?

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.