Séries entières

Sur le disque ouvert de convergence, la somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ et se dérive terme à terme.

Définition — rayon de convergence

Pour $\sum a_n z^n$, $R = \sup\{r\text{o},\ (a_n r^n)\text{born}[?][?]e[?]e\} \in [0,+\infty]$. **Lemme d'Abel** : si $|z|<R$, convergence absolue ; si $|z|>R$, divergence grossière ; sur $|z|=R$, tout peut arriver. Convergence normale sur tout disque fermé $|z|\leq r<R$.

Méthode — calculer R

Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors $R=\frac{1}{\ell}$. Comparaison : $|a_n|\leq|b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$; $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$. Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le même rayon.

Propriété — opérations

Somme : $R \geq \min(R_a, R_b)$ (égalité si $R_a \neq R_b$). Produit de Cauchy : $R \geq \min(R_a, R_b)$ et la somme est le produit des sommes.

Théorème — régularité de la somme

Sur $]-R,R[$, $f(x)=\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f'(x)=\sum n a_n x^{n-1}$, $\int_0^x f = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (**unicité** des coefficients). Sur le disque ouvert complexe, la somme est continue.

Définition — fonction développable en série entière

f est DSE en 0 s'il existe $r>0$ et (a_n) avec $f(x)=\sum a_n x^n$ sur $]-r,r[$; alors f est $\mathcal{C}^\infty$ et la série est sa série de Taylor (mais une fonction $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas toujours DSE : e^{-1/x^2}).

Propriété — développements usuels

$$e^x=\sum \frac{x^n}{n!}\ (R=\infty) \quad \frac{1}{1-x}=\sum x^n\ (R=1) \quad \ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ (R=1)$$

$$\cos x=\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \sin x=\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \arctan x=\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ (R=1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ (R=1)$$

Méthode — équations différentielles

Chercher une solution $\sum a_n x^n$, injecter dans l'équation, identifier les coefficients (relation de récurrence), déterminer le rayon, puis conclure par unicité du problème de Cauchy.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment calculer un rayon de convergence ?

Souvent par d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$; sinon par comparaison ou en revenant à la définition (bornitude de $a_n r^n$).

Une fonction C^∞ est-elle toujours développable en série entière ?

Non : e^{-1/x^2} (prolongée par 0) est C^∞ avec toutes ses dérivées nulles en 0, mais n'est pas nulle au voisinage de 0.

Que se passe-t-il au bord du disque de convergence ?

Tout est possible : $\sum x^n$ diverge en ± 1, $\sum \frac{x^n}{n}$ converge en -1 mais pas en 1, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge partout sur le bord.

Comment résoudre une équation différentielle par série entière ?

On injecte $\sum a_n x^n$, on obtient une relation de récurrence sur les a_n, on vérifie que le rayon est non nul, puis on conclut par unicité.