Second degré

Le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ décide du nombre de racines, du signe et de la factorisation.

Définition — trinôme, forme canonique

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. La courbe est une **parabole** de sommet $S(\alpha;\beta)$, tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

Théorème — résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

Propriété — factorisation

Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; si $\Delta = 0$: $a(x - x_0)^2$; si $\Delta < 0$: pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

Propriété — somme et produit des racines

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Utile pour trouver la seconde racine quand la première est évidente.

Théorème — signe du trinôme

Le trinôme est du **signe de** a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines. Si $\Delta \leq 0$, il est toujours du signe de a (sauf en la racine double où il s'annule).

Exemple

$2x^2 - 3x - 2$: $\Delta = 9 + 16 = 25$, racines 2 et $-\frac{1}{2}$.

$2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$; négatif sur $\left]-\frac{1}{2};2\right[$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment résoudre une équation du second degré ?

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, deux solutions $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$, une solution $x = -\frac{b}{2a}$; si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Qu'est-ce que la forme canonique ?

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$. Elle donne directement le sommet $(\alpha;\beta)$ de la parabole.

Comment factoriser un trinôme ?

Si $\Delta\geq 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec x_1, x_2 les racines. Si $\Delta<0$, pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

Comment étudier le signe d'un trinôme ?

Il est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines ; s'il n'y a pas de racine, il est toujours du signe de a.