Réduction des endomorphismes

Un endomorphisme est **diagonalisable** ssi il annule un polynôme scindé à racines simples, ou ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n.

Définition — éléments propres

λ est **valeur propre** de u s'il existe $x \neq 0$ avec $u(x) = \lambda x$; $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est le **sous-espace propre**. Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Le spectre est fini en dimension finie.

Définition — polynôme caractéristique

$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$, unitaire de degré n ; ses racines sont les valeurs propres. $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + [\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1. + (-1)^n \det A$. Pour toute valeur propre : $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$ (multiplicité algébrique). Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Théorème — diagonalisabilité

u est diagonalisable (il existe une base de vecteurs propres) ssi l'une des conditions équivalentes :

- $E = \bigoplus E_\lambda$, i.e. $\sum \dim E_\lambda = n$;
- χ_u est scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour toute valeur propre ;
- u annule un polynôme scindé à **racines simples** ;
- le polynôme minimal est scindé à racines simples.

Condition suffisante : χ_u scindé à racines simples (n valeurs propres distinctes).

Théorème — trigonalisation

u est trigonalisable ssi χ_u est scindé. Dans $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable. Alors $\mathrm{tr}\, u = \sum \lambda_i$ et $\det u = \prod \lambda_i$ (avec multiplicités).

Théorème — polynômes annulateurs, lemme des noyaux, Cayley-Hamilton

Si $P(u) = 0$, toute valeur propre est racine de P. **Lemme des noyaux** : si $P = P_1[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.P_k$ avec les P_i premiers entre eux deux à deux, $\ker P(u) = \bigoplus \ker P_i(u)$. **Cayley-Hamilton** : $\chi_u(u) = 0$. Le **polynôme minimal** π_u divise tout annulateur et a les mêmes racines que χ_u.

Méthode — applications

Puissances $A^n = PD^nP^{-1}$; division euclidienne de X^n par un annulateur ; suites récurrentes linéaires $X_{n+1} = AX_n$; systèmes différentiels $X' = AX$; exponentielle de matrice.

Exemple

> $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$: $\chi_A=X^2-1$, valeurs propres ±1, diagonalisable, $A^n=I$ si n pair, A sinon. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable ($\dim E_1=1<2$).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment savoir si une matrice est diagonalisable ?

Elle l'est ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, ou ssi elle annule un polynôme scindé à racines simples. Une condition suffisante : n valeurs propres distinctes.

Que dit le théorème de Cayley-Hamilton ?

Toute matrice annule son polynôme caractéristique : $\chi_A(A)=0$.

Quelle est la différence entre polynôme minimal et polynôme caractéristique ?

Le polynôme minimal est l'annulateur unitaire de plus petit degré ; il divise le polynôme caractéristique et a les mêmes racines.

Comment calculer A^n avec la réduction ?

Si $A=PDP^{-1}$ avec D diagonale, $A^n=PD^nP^{-1}$. Sinon, on divise X^n par un polynôme annulateur.