Produit scalaire dans l'espace et équations de plans

Un plan est caractérisé par un **vecteur normal** $\vec{n}(a;b;c)$: son équation cartésienne est $ax+by+cz+d=0$.

Propriété — produit scalaire

Repère orthonormé : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$, $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$. Mêmes propriétés que dans le plan (bilinéarité, symétrie).

Définition — orthogonalité

Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs le sont (elles n'ont pas besoin d'être sécantes). Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan ; elle est alors orthogonale à toute droite du plan.

Théorème — équation cartésienne d'un plan

Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation $ax+by+cz+d=0$; réciproquement toute équation de ce type avec $(a;b;c)\neq\vec{0}$ définit un plan de vecteur normal $\vec{n}$. Plan passant par A : $M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Propriété — parallélisme et perpendicularité

Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est colinéaire au vecteur normal.

Méthode — projeté orthogonal et distance

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$ est l'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}$. Distance de $M(x_0;y_0;z_0)$ au plan :

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemple

$\vec{n}(1;-2;2)$, $A(1;0;3)$: plan $(x-1)-2y+2(z-3)=0\Leftrightarrow x-2y+2z-7=0$. Distance de O au plan : $\frac{7}{3}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est l'équation cartésienne d'un plan ?

$ax+by+cz+d=0$ où $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan.

Comment trouver un vecteur normal à un plan ?

En cherchant un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (produit scalaire nul avec chacun).

Comment calculer la distance d'un point à un plan ?

On projette orthogonalement le point sur le plan (droite passant par le point dirigée par $\vec{n}$) et on calcule la longueur, ou on utilise $\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Comment montrer que deux plans sont perpendiculaires ?

Leurs vecteurs normaux sont orthogonaux : $\vec{n}.\vec{n}'=0$. Ils sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.