Produit scalaire

Quatre expressions du produit scalaire, à choisir selon les données ; deux vecteurs sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Définition — produit scalaire

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$. Si l'un est nul, le produit scalaire vaut 0.

Propriété — autres expressions

- Projeté : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\pm AB\times AH$.
- Normes : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2\right)$.
- Coordonnées (repère orthonormé) : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$; $|\vec{u}|^2=x^2+y^2$.

Propriétés

Symétrie $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; bilinéarité $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$, $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$.
Identités : $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$.

Théorème — orthogonalité

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. En coordonnées : $xx'+yy'=0$.

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\widehat{A}.$$

(Pythagore généralisé.)

Exemple

$\vec{u}(3;-1)$, $\vec{v}(2;6)$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=6-6=0$, les vecteurs sont orthogonaux.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment calculer un produit scalaire ?

Avec les coordonnées $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$, avec les normes et l'angle $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, ou par projection orthogonale.

À quoi sert le produit scalaire ?

À prouver l'orthogonalité ($\vec{u}\cdot\vec{v}=0$), à calculer un angle, une longueur (formule d'Al-Kashi) et à trouver des équations de droites ou de cercles.

Qu'est-ce que la formule d'Al-Kashi ?

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$: une généralisation de Pythagore à tous les triangles.

Comment calculer un angle avec le produit scalaire ?

$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, puis $\theta = \arccos(\ldots)$.