Probabilités : univers dénombrables et variables discrètes

Avec un univers infini, les probabilités deviennent des **sommes de séries** ; la **fonction génératrice** code toute la loi d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition — espace probabilisé

Une **tribu** $\mathcal{A}$ sur Ω contient Ω, est stable par complémentaire et par réunion dénombrable. Une probabilité P vérifie $P(\Omega)=1$ et la **σ-additivité** : $P\left(\bigcup A_n\right)=\sum P(A_n)$ pour des A_n deux à deux disjoints. **Continuité monotone** : si $A_n\uparrow$, $P(A_n)\to P\left(\bigcup A_n\right)$; si $A_n\downarrow$, $P(A_n)\to P\left(\bigcap A_n\right)$. Sous-additivité $P\left(\bigcup A_n\right)\leq\sum P(A_n)$. Un événement de probabilité nulle est **négligeable** ; « presque sûr » = probabilité 1.

Définition — variable aléatoire discrète

$X:\Omega\to E$ avec $X(\Omega)$ fini ou dénombrable et $\{X=x\}\in\mathcal{A}$. Loi : $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$, de somme 1. Couple, lois conjointe et marginales, loi conditionnelle ; indépendance $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$; lemme des coalitions.

Propriété — lois usuelles

Géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$ (rang du premier succès) : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$, $E=\frac{1}{p}$, $V=\frac{1-p}{p^2}$, seule loi **sans mémoire** : $P(X>n+k|X>n)=P(X>k)$. **Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$: $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $E=V=\lambda$, limite de $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$ (événements rares) ; somme de Poisson indépendantes : $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Définition — espérance, variance

$E(X)=\sum xP(X=x)$ si la série converge absolument. Théorème de transfert $E(g(X))=\sum g(x)P(X=x)$. Linéarité, positivité, croissance ; $|E(X)|\leq E(|X|)$. Si X, Y indépendantes et d'espérance finie : $E(XY)=E(X)E(Y)$.
$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$, $V(aX+b)=a^2V(X)$,
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$; Cauchy-Schwarz
$E(XY)^2\leq E(X^2)E(Y^2)$.

Définition — fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t)=E(t^X)=\sum P(X=n)t^n$, rayon ≥ 1, $G_X(1)=1$. Elle **caractérise** la loi ; $E(X)=G'_X(1)$ (existe ssi G_X dérivable en 1) et $V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2$. Si X, Y indépendantes, $G_{X+Y}=G_XG_Y$.
Bernoulli : $1-p+pt$; binomiale : $(1-p+pt)^n$; géométrique : $\frac{pt}{1-(1-p)t}$; Poisson : $e^{\lambda(t-1)}$.

Inégalités et loi faible des grands nombres

Markov : $P(|X|\geq a)\leq\frac{E(|X|)}{a}$. Bienaymé-Tchebychev : $P(|X-E(X)|\geq\epsilon)\leq\frac{V(X)}{\epsilon^2}$. Pour (X_n) indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2, avec $\overline{X}_n=\frac{X_1+[\raiseox?]3.\,.[\hspacce?]1.+X_n}{n}$:

$$\forall\epsilon>0,\ P(|\overline{X}_n-m|\geq\epsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}\to 0.$$

Questions fréquentes sur ce chapitre

À quoi sert la fonction génératrice ?

$G_X(t)=E(t^X)$ caractérise la loi de X, donne $E(X)=G'_X(1)$, et $G_{X+Y}=G_XG_Y$ pour des variables indépendantes : idéal pour les sommes.

Pourquoi la loi géométrique est-elle sans mémoire ?

Parce que $P(X>n+k|X>n)=P(X>k)$: le passé n'influence pas le temps d'attente restant. C'est la seule loi sur $\mathbb{N}^*$ ayant cette propriété.

Qu'est-ce que la loi faible des grands nombres ?

Pour des variables indépendantes de même loi, la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance : $P(|\overline{X}_n-m|\geq\epsilon)\to 0$.

Quand la loi de Poisson approche-t-elle la loi binomiale ?

Quand n est grand et p petit avec $np=\lambda$ fixé : $\mathcal{B}(n,\lambda/n)\to\mathcal{P}(\lambda)$ (loi des événements rares).