# Probabilités conditionnelles et indépendance

$P_A(B)$ est la probabilité de $B$ **sachant que** $A$ est réalisé.

**Définition — probabilité conditionnelle**

Pour $P(A)\neq 0$ :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\quad \text{donc} P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B).$$

**Propriété — arbre pondéré**

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut $1$.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches (probabilité d'une intersection).
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

**Formule des probabilités totales**

Si $A_1,\ldots,A_n$ forment une **partition** de l'univers :

$P(B)=P(A_1\cap B)+[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.+P(A_n\cap B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.+P(A_n)P_{A_n}(B).$

Cas courant : $P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

**Définition — indépendance**

$A$ et $B$ sont **indépendants** si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B)=P(B)$ (lorsque $P(A)\neq 0$). Si $A$ et $B$ sont indépendants, $\overline{A}$ et $B$ le sont aussi.

**Exemple**

Une usine : $60\,\%$ de pièces de la machine $M_1$ (défectueuses à $2\,\%$), $40\,\%$ de $M_2$ (défectueuses à $5\,\%$). $P(D)=0{,}6\times 0{,}02+0{,}4\times 0{,}05=0{,}032$. Sachant qu'une pièce est défectueuse, $P_D(M_2)=\frac{0{,}02}{0{,}032}=0{,}625$.

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ : la probabilité de $B$ sachant que $A$ est réalisé.

## Comment savoir si deux événements sont indépendants ?

Ils sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$.

## Qu'est-ce que la formule des probabilités totales ?

Pour une partition $A_1, \ldots, A_n$ de l'univers :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + [\text{raiseox?}]3. .[\text{hspacce?}]1. + P(A_n \cap B) = \sum P(A_i) P_{A_i}(B)$.

## Comment utiliser un arbre pondéré ?

On multiplie les probabilités le long d'un chemin pour obtenir une intersection, et on additionne les chemins qui mènent au même événement final.