Primitives et équations différentielles

Une **primitive** de f est une fonction F dont la dérivée est f ; les solutions de $y'=ay$ sont les Ce^{ax}.

Définition — primitive

F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F'=f$. Toute fonction continue sur I admet des primitives, qui diffèrent d'une constante : $F+C$. Une seule vérifie une condition $F(x_0)=y_0$.

Propriété — primitives usuelles

$f(x)$	x^n $(n\neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\cos x$	$\sin x$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	e^x	$2\sqrt{x}$	$\sin x$	$-\cos x$

Propriété — formes composées

$u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u} \to \ln|u|$; $u'e^u \to e^u$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \to 2\sqrt{u}$; $\frac{u'}{u^2} \to -\frac{1}{u}$.

Théorème — équation $y'=ay$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x)=Ce^{ax}$, $C\in\mathbb{R}$.

Théorème — équation $y'=ay+b$ $(a\neq 0)$

Les solutions sont $y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$. La fonction constante $-\frac{b}{a}$ est la solution particulière.

Exemple

$y'=2y-6$ avec $y(0)=1$: $y=Ce^{2x}+3$ et $1=C+3$ donne $C=-2$: $y(x)=3-2e^{2x}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Une fonction F dont la dérivée est f. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Comment résoudre y' = ay + b ?

Les solutions sont $y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$, où C est déterminée par une condition initiale.

Quelles sont les primitives usuelles ?

$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\frac{1}{x} \to \ln x$, $e^x \to e^x$, $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}$, $\cos \to \sin$, $\sin \to -\cos$.

Comment trouver une primitive de u'e^u ou u'/u ?

$u'e^u$ a pour primitive e^u, $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$, $u'u^n$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.