Polynômes et fractions rationnelles

Un polynôme de degré n a **au plus** n **racines** ; dans $\mathbb{C}$ il en a exactement n comptées avec multiplicité.

Définition — degré, division euclidienne

$\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$, $\deg(P+Q)\leq\max$. Pour $B\neq 0$, il existe un unique couple (Q,R) avec $A=BQ+R$ et $\deg R<\deg B$. a est racine de P ssi $(X-a)$ divise P.

Définition — multiplicité

a est racine d'ordre m si $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$. Caractérisation : $P(a)=P'(a)=$[\raiseox?]3. .[\hspacce?]1.$=P^{(m-1)}(a)=0$ et $P^{(m)}(a)\neq 0$. Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité ; s'il en a plus, il est nul.

Théorème — d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Conséquence : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est **scindé** : $P=\lambda\prod(X-a_k)^{m_k}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, les irréductibles sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif ; les racines complexes non réelles d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

Théorème — relations coefficients-racines

Si $P=a_nX^n+$[\raiseox?]3. .[\hspacce?]1.$+a_0$ est scindé de racines $x_1,\dots,x_n$: $\sum x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod x_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ (fonctions symétriques élémentaires).

Définition — PGCD, Bézout

$\mathrm{PGCD}(A,B)$ unitaire obtenu par l'algorithme d'Euclide ; A et B sont premiers entre eux ssi il existe U, V avec $AU+BV=1$ (Bézout). Lemme de Gauss.

Théorème — décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme (partie entière, obtenue par division euclidienne) et d'éléments simples. Dans $\mathbb{C}(X)$: $\frac{\alpha}{(X-a)^k}$. Dans $\mathbb{R}(X)$ s'ajoutent les $\frac{\beta X+\gamma}{(X^2+pX+q)^k}$. Coefficient d'un pôle simple a : $\frac{A(a)}{B'(a)}$.

Exemple

$\frac{1}{X(X-1)}=-\frac{1}{X}+\frac{1}{X-1}$; $\frac{X}{(X-1)^2}=\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$.

Synthèse téléchargée depuis https://mathovore.fr/resume-cours-maths/sup/polynomes-fractions-rationnelles.html – Mathovore, site de maths.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de d'Alembert-Gauss ?

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$; il est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

Comment déterminer la multiplicité d'une racine ?

a est racine d'ordre m ssi $P(a) = P'(a) =$[\raiseox?]3. .[\hspacce?]$1. = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Comment décomposer une fraction rationnelle en éléments simples ?

Partie entière par division euclidienne, puis pour chaque pôle des termes $\frac{\alpha}{(X-a)^k}$; pour un pôle simple, $\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}$.

Quels sont les polynômes irréductibles de R[X] ?

Les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.