Nombres complexes

Le passage entre forme **algébrique** $a+ib$ et forme **exponentielle** $re^{i\theta}$ est l'outil central : la première pour additionner, la seconde pour multiplier.

Définition — forme algébrique, conjugué, module

$z=a+ib$ avec $i^2=-1$; $\mathrm{Re}\,z=a$, $\mathrm{Im}\,z=b$. Conjugué $\overline{z}=a-ib$; module $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}$. $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$, $|zz'|=|z||z'|$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$, inégalité triangulaire $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

Définition — argument, forme exponentielle

Pour $z\neq0$, $z=re^{i\theta}$ avec $r=|z|$ et $\theta=\arg z\ [2\pi]$, où $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$, $\arg\frac{z'}{z}=\arg z-\arg z'$, $\arg\overline{z}=-\arg z$.

Théorème — Moivre et Euler

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Technique de l'angle moitié : $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\theta/2}$.

Théorème — racines n-ièmes

Les racines n-ièmes de l'unité sont les $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$, $k\in\{0,\dots,n-1\}$; leur somme est nulle ($n\geq2$). Les racines n-ièmes de $re^{i\theta}$ sont les $\sqrt[n]{r}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n}$.

Théorème — équation du second degré dans $\mathbb{C}$

$az^2+bz+c=0$ ($a\neq0$) : $\Delta=b^2-4ac$, δ une racine carrée complexe de Δ ; solutions $\frac{-b\pm\delta}{2a}$. Il y a toujours deux racines (éventuellement confondues). Somme $-\frac{b}{a}$, produit $\frac{c}{a}$.

Propriété — géométrie

Affixe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$; $AB=|z_B-z_A|$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. A, B, C alignés $\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$. $z\to az+b$ ($a\neq0$) est une similitude directe : rotation si $|a|=1$, homothétie si $a\in\mathbb{R}^*$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment trouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe ?

On écrit $z=re^{i\theta}$; les n racines sont $\sqrt[n]{r}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ pour $k=0,\dots,n-1$. Elles forment un polygone régulier.

Comment linéariser cos^n x ?

Avec les formules d'Euler : on écrit $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, on développe par le binôme et on regroupe les termes conjugués.

Comment calculer une somme de cosinus avec les complexes ?

On prend la partie réelle d'une somme géométrique $\sum e^{ik\theta}$, puis on factorise par l'angle moitié.

Comment interpréter géométriquement z ↦ az + b ?

C'est une similitude directe : rotation d'angle $\arg a$ composée avec une homothétie de rapport $|a|$ et une translation. Si $|a| = 1$ c'est un déplacement.