Épreuves de Bernoulli et loi binomiale

Répéter n fois une épreuve de Bernoulli de façon **indépendante** donne une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Définition — épreuve et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : succès (probabilité p) et échec ($1-p$). Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes.

Théorème — loi binomiale

Le nombre de succès X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$: pour $k \in \{0,\ldots,n\}$,

$$P(X=k) = [\backslash\text{binom?}]nkp^k(1-p)^{n-k}.$$

$$E(X)=np \quad V(X)=np(1-p) \quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(10;0{,}3)$: $P(X=2) = [\backslash\text{binom?}]102\ 0{,}3^2\ 0{,}7^8 \approx 0{,}233$;
$P(X \geq 1) = 1-0{,}7^{10} \approx 0{,}972$; $E(X)=3$.

Méthode — à la calculatrice

$P(X=k)$: `binompdf(n,p,k)` ; $P(X \leq k)$: `binomcdf(n,p,k)`.
$P(X \geq k) = 1-P(X \leq k-1)$; $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b)-P(X \leq a-1)$.

Méthode — déterminer un seuil

Plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$: $1-(1-p)^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln(1-p)}$.

Définition — intervalle de fluctuation

Intervalle $[a;b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$, choisi avec $P(X<a) \leq 0{,}025$ et $P(X>b) \leq 0{,}025$: il sert à juger si une fréquence observée est « normale ».

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quand utiliser la loi binomiale ?

Quand on répète n fois, de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p, et qu'on compte le nombre de succès.

Comment calculer P(X = k) pour une loi binomiale ?

$$P(X=k) = [\backslash\text{binom?}]nkp^k(1-p)^{n-k}.$$

Quelle est l'espérance de la loi binomiale ?

$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$, $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$.

Comment calculer P(X ≥ 1) ?

Avec l'événement contraire : $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$.