Logique, ensembles et applications

Savoir **nier** une proposition avec quantificateurs et reconnaître **injection**, **surjection**, **bijection** : les réflexes de toute l'année.

Propriété — négation

$\text{non}(\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x,\ \text{non}\ P(x)$; $\text{non}(\exists x,\ P(x)) \equiv \forall x,\ \text{non}\ P(x)$; $\text{non}(P \Rightarrow Q) \equiv P\ \text{et non}\ Q$. L'ordre des quantificateurs compte : $\forall x\ \exists y$ n'est pas $\exists y\ \forall x$.

Méthode — raisonnements

- **Contraposée** : $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\text{non}\ Q \Rightarrow \text{non}\ P$.
- **Absurde** : supposer $\text{non}\ Q$ et aboutir à une contradiction.
- **Récurrence** simple, forte ($P(0), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$), double.
- **Analyse-synthèse** : on suppose une solution et on trouve ses propriétés nécessaires, puis on vérifie qu'elles conviennent.

Définition — opérations sur les ensembles

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, complémentaire $\overline{A}$, produit $A \times B$, ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathcal{E})$. Lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Définition — application

$f : E \to F$ associe à tout $x \in E$ un unique $f(x) \in F$. Image directe $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$; image réciproque $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$. Composée $g \circ f$.

Définition — injection, surjection, bijection

f est **injective** si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$; **surjective** si tout $y \in F$ a au moins un antécédent ; **bijective** si les deux (tout y a un unique antécédent). Alors $f^{-1} : F \to E$ existe et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

Propriété — composition

La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. ...). Si $g \circ f$ est injective, f l'est ; si $g \circ f$ est surjective, g l'est. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition — relations

Relation d'**équivalence** : réflexive, symétrique, transitive (classes d'équivalence, partition). Relation d'**ordre** : réflexive, antisymétrique, transitive ; ordre total si deux éléments sont toujours comparables. Majorant, borne supérieure (plus petit des majorants).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment nier une proposition avec des quantificateurs ?

On échange $\forall$ et $\exists$ et on nie la propriété finale : la négation de « $\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$ » est « $\exists x,\ \forall y,\ \text{non}\ P(x,y)$ ».

Quelle est la différence entre injection et surjection ?

Injective : deux éléments distincts ont des images distinctes. Surjective : tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent. Bijective : les deux, chaque élément a exactement un antécédent.

Qu'est-ce qu'un raisonnement par analyse-synthèse ?

On suppose qu'une solution existe et on en déduit sa forme nécessaire (analyse), puis on vérifie que les candidats trouvés conviennent effectivement (synthèse).

Quand utiliser la contraposée plutôt que l'absurde ?

Pour prouver $P \Rightarrow Q$, la contraposée démontre $\text{non}\ Q \Rightarrow \text{non}\ P$; l'absurde suppose P et $\text{non}\ Q$ pour aboutir à une contradiction. La contraposée est souvent plus propre quand $\text{non}\ Q$ est facile à exploiter.