Fonction logarithme népérien

$\ln$ est la fonction **réciproque** de $\exp$: elle transforme les produits en sommes.

Définition — logarithme népérien

Pour $x>0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y=x$. Ainsi $\ln(e^x)=x$ pour tout x et $e^{\ln x}=x$ pour $x>0$; $\ln 1=0$, $\ln e=1$.

Propriétés algébriques

Pour $a,b>0$ et n entier :

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b \quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \quad \ln\frac{1}{a}=-\ln a \quad \ln(a^n)=n\ln a \quad \ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a.$$

Théorème — dérivée et variations

$\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $(\ln x)'=\frac{1}{x}>0$: $\ln$ est **strictement croissante**, concave. $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$; $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Propriété — limites

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Méthode — résoudre avec ln

$3^n\geq 1000 \Leftrightarrow n\ln 3\geq \ln 1000 \Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 1000}{\ln 3}\approx 6{,}29$, donc $n\geq 7$. $e^{2x}=5\Leftrightarrow x=\frac{\ln 5}{2}$.
$0{,}8^n\leq 0{,}01 \Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ (attention : $\ln 0{,}8<0$ renverse l'inégalité).

À retenir

Les courbes de $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce que le logarithme népérien ?

La fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln x=y\Leftrightarrow x=e^y$ pour $x>0$. On a $\ln 1=0$, $\ln e=1$ et $\ln' x=\frac{1}{x}$.

Quelles sont les propriétés du logarithme ?

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$, $\ln a^n=n\ln a$, $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$.

Comment résoudre une inéquation avec ln ?

On isole le logarithme puis on applique l'exponentielle (croissante) : $\ln x\leq 2\Leftrightarrow 0<x\leq e^2$.

Ne pas oublier la condition $x>0$.

Comment résoudre $q^n \leq a$?

On applique $\ln$: $n\ln q \leq \ln a$, puis on divise par $\ln q$ en changeant le sens si $0<q<1$ (car $\ln q<0$).