Limites de fonctions et asymptotes

Une **asymptote** traduit graphiquement une limite ; les **croissances comparées** lèvent les indéterminations avec e^x et $\ln x$.

Définition — asymptotes

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$, la droite $y=\ell$ est **asymptote horizontale**. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, la droite $x=a$ est **asymptote verticale**.

Propriété — limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$.

Théorème — croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n}=0 \quad \lim_{x\to0^+} x^n\ln x=0.$$

L'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme.

Théorème — comparaison et composition

Théorèmes de comparaison et des gendarmes comme pour les suites. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X)=\ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(u(x))=\ell$.

Méthode — lever une forme indéterminée

Polynômes et fractions rationnelles en l'infini : factoriser par le terme de plus haut degré. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+3}=\lim \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=2.$

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelles sont les formes indéterminées ?

$+\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. On les lève en factorisant par le terme dominant, en utilisant les croissances comparées ou une quantité conjuguée.

Comment trouver une asymptote horizontale ?

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$, la droite $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe.

Comment trouver une asymptote verticale ?

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, la droite $x=a$ est asymptote verticale.

Que sont les croissances comparées ?

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance : $\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$ et $x^n e^{-x} \to 0$; le logarithme est dominé par les puissances : $\frac{\ln x}{x} \to 0$.