Limites et continuité des fonctions

Une fonction continue sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes ; si elle est strictement monotone, elle réalise une **bijection** continue.

Définition — limite, continuité

$f(x) \to \ell$ quand $x \to a$: $\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \epsilon$.
Caractérisation séquentielle : $f(x) \to \ell$ ssi pour toute suite $x_n \to a$, $f(x_n) \to \ell$ (utile pour prouver qu'une limite n'existe pas). f continue en a si $f(x) \to f(a)$.

Théorème — valeurs intermédiaires

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b)<0$, alors f s'annule sur $]a;b[$.

Théorème — image d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : f continue sur $[a;b]$ est **bornée et atteint ses bornes** (existence d'un maximum et d'un minimum).

Théorème — bijection continue

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et f^{-1} est continue, strictement monotone de même sens.

Définition — continuité uniforme, Lipschitz

f est **uniformément continue** si $\forall \epsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x,y,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon$ (δ ne dépend pas de x). f est k**-lipschitzienne** si $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$; lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue.

Théorème — Heine

Toute fonction continue sur un **segment** est uniformément continue.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre continuité et continuité uniforme ?

En continuité uniforme, le δ ne dépend que de ϵ, pas du point x. Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue (théorème de Heine).

Que dit le théorème des bornes atteintes ?

Une fonction continue sur un segment $[a;b]$ est bornée et atteint son maximum et son minimum.

Comment montrer qu'une limite n'existe pas ?

Avec la caractérisation séquentielle : on exhibe deux suites tendant vers a dont les images ont des limites différentes.

Qu'est-ce que le théorème de la bijection ?

Une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$, et sa réciproque est continue et de même monotonie.