# Intégration sur un intervalle quelconque et intégrales à paramètre

Le théorème de **convergence dominée** et ses corollaires (continuité, dérivation sous l'intégrale) sont les outils centraux du programme d'analyse de MP.

### Définition — intégrale généralisée

Pour $f$ continue par morceaux sur $[a,b[$ : $\int_a^b f$ converge si $\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe.

**Convergence absolue** ( $\int |f|<\infty$ , $f$ dite intégrable) $\Rightarrow$ convergence. Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha>1$ ; $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha<1$ ; $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}dt$ converge ssi $\lambda>0$ ; $\int_0^1 \ln t\,dt$ converge.

### Théorème — comparaison (fonctions positives)

Si $0\le f\le g$ et $g$ intégrable, alors $f$ intégrable. Si $f\sim g$ en $b$ (positives), même nature. Si $f=O(g)$, $g$ intégrable $\Rightarrow$ $f$ intégrable. Attention : $f$ intégrable sur $[a,+\infty[$ n'implique pas $f\to 0$.

### Théorème — convergence dominée

Si $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$ (fonctions continues par morceaux) et s'il existe $\varphi$ intégrable sur $I$ avec $|f_n|\le\varphi$ pour tout $n$ (**hypothèse de domination**), alors $f$ est intégrable et

$$\int_I f_n \to \int_I f.$$

### Théorème — intégration terme à terme

Si $\sum u_n$ converge simplement vers $S$ (fonctions intégrables sur $I$ ) et si $\sum\int_I |u_n|<+\infty$, alors $S$ est intégrable et $\int_I S=\sum\int_I u_n$.

### Théorème — intégrales à paramètre $F(x)=\int_I f(x,t)\,dt$

**Continuité** : si $f$ est continue en $x$, continue par morceaux en $t$, et dominée $|f(x,t)|\le\varphi(t)$ intégrable (domination locale possible), alors $F$ est continue.

**Dérivation** : si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue en $x$, continue par morceaux en $t$ et dominée, alors $F$ est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

**Exemple**

Fonction **Gamma** : $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$,

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Que dit le théorème de convergence dominée ?

Si $f_n \to f$ simplement et $|f_n|\leq\varphi$ intégrable indépendante de $n$, alors $\int f_n \to \int f$.

### Comment montrer qu'une intégrale impropre converge ?

Par comparaison avec les intégrales de référence ( $\int \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int e^{-\lambda t}dt$), par équivalent en la borne singulière, ou en montrant la convergence absolue.

### Comment dériver sous le signe intégral ?

Il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, soit continue en $x$, continue par morceaux en $t$, et dominée par une fonction intégrable ; alors $F'(x)=\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

### Qu'est-ce que la fonction Gamma ?

$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ pour $x>0$, avec $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1)=n!$.