Calcul intégral

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est une **aire algébrique** ; elle se calcule avec une primitive : $F(b)-F(a)$.

Définition — intégrale

Pour f continue et positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=a$, $x=b$. Pour f de signe quelconque, c'est une aire **algébrique** (comptée négativement sous l'axe).

Théorème fondamental

Si F est une primitive de f continue sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b.$$

La fonction $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriétés

- Linéarité : $\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.
- Chasles : $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$; $\int_b^a f=-\int_a^b f$.
- Positivité : si $f\geq 0$ sur $[a;b]$ ($a\leq b$) alors $\int_a^b f\geq 0$; si $f\leq g$ alors $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.

Définition — valeur moyenne

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Théorème — intégration par parties

Pour u, v dérivables à dérivées continues :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemple

$\int_0^1 xe^x\,dx$ avec $u'=e^x$, $v=x$: $\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-(e-1)=1$.

Méthode — aire entre deux courbes

Si $f\geq g$ sur $[a;b]$, l'aire entre les courbes vaut $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que représente une intégrale ?

Pour f continue et positive, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire (en unités d'aire) entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$.

Comment calculer une intégrale ?

Avec une primitive F : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Qu'est-ce que l'intégration par parties ?

$\int_a^b u'v=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b uv'$. Elle sert par exemple pour $\int xe^x\,dx$ ou $\int \ln x\,dx$.

Comment calculer la valeur moyenne d'une fonction ?

$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.