Intégration sur un segment

Deux techniques à maîtriser sans hésiter : l'**intégration par parties** et le **changement de variable**.

Propriétés fondamentales

Linéarité, Chasles, positivité et croissance ; $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ ($a \leq b$). Si f est continue, positive et $\int_a^b f = 0$ avec $a<b$, alors $f = 0$. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.

Théorème fondamental

Si f est continue sur I et $a \in I$, $F : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a ; F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. Pour toute primitive G : $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Théorème — intégration par parties, changement de variable

$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ pour u, v de classe $\mathcal{C}^1$. Changement de variable : pour φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ et f continue,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Théorème — sommes de Riemann

Pour f continue sur $[a;b]$: $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \to \int_a^b f$. Cas usuel : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f$.

Méthode — primitives classiques

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$; $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$; $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; fractions rationnelles : décomposition en éléments simples ; $e^{ax}\cos bx$: passer par $\mathrm{Re}(e^{(a+ib)x})$; polynômes trigonométriques : linéariser.

Exemple

Intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$: $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment calculer une intégrale de fraction rationnelle ?

On décompose en éléments simples, puis on intègre chaque terme : $\frac{1}{x-a} \to \ln|x-a|$, $\frac{1}{x^2+1} \to \arctan x$.

Qu'est-ce qu'une somme de Riemann ?

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1 f$ pour f continue : cela permet de calculer des limites de sommes.

Que sont les intégrales de Wallis ?

$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$, avec $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; elles interviennent dans la formule de Stirling.

Comment changer de variable dans une intégrale ?

On pose $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$, on remplace dx par $\varphi'(t)\,dt$ et on change les bornes.