Homothéties, agrandissements et réductions

Une homothétie **agrandit ou réduit** une figure depuis un centre ; les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Définition — homothétie

L'**homothétie** de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) transforme un point M en M' tel que M' est sur la droite (OM) et $OM' = |k| \times OM$; M' est du même côté que M si $k > 0$, de l'autre côté si $k < 0$.

Propriétés

- Elle conserve l'alignement, le parallélisme, les angles.
- Les longueurs sont multipliées par $|k|$: si $|k| > 1$ c'est un **agrandissement**, si $|k| < 1$ une **réduction**.
- L'image d'une droite est une droite parallèle.

Théorème — aires et volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k : les longueurs sont multipliées par k, les **aires par** k^2, les **volumes par** k^3.

Exemple

On réduit une pyramide de volume $270\ \text{cm}^3$ avec un rapport $\frac{1}{3}$: le volume devient $270 \times \frac{1}{27} = 10\ \text{cm}^3$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce qu'une homothétie ?

Une transformation de centre O et de rapport k qui envoie M sur M' tel que $OM' = |k| \times OM$, sur la droite (OM) ; du même côté si $k > 0$, de l'autre côté si $k < 0$.

Comment évoluent les aires dans un agrandissement de rapport k ?

Les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

Quel est le lien entre homothétie et théorème de Thalès ?

Dans la configuration de Thalès, le triangle AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AM}{AB}$.

Une homothétie conserve-t-elle les angles ?

Oui : elle conserve les angles, l'alignement et le parallélisme, mais pas les longueurs (sauf si $k = \pm 1$).