Étude de fonctions : valeur absolue, composées et modélisation

Optimiser, c'est **modéliser** par une fonction puis lire son **tableau de variations**.

Définition — valeur absolue

$f(x)=|x|$ vaut x si $x\geq 0$ et $-x$ si $x<0$; paire, décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$, courbe en « V ». $|x-a|=r \Leftrightarrow x=a\pm r$.

Propriété — variations de fonctions associées

Sur un intervalle I où u est monotone :

- $u+k$ a les mêmes variations que u ;
- λu a les mêmes variations si $\lambda>0$, les variations contraires si $\lambda<0$;
- $\sqrt{u}$ (si $u\geq 0$) a les mêmes variations que u ;
- $\frac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas et garde un signe constant) a les variations contraires ;
- u^2 a les mêmes variations là où $u\geq 0$, contraires là où $u\leq 0$.

Méthode — résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et son intervalle de validité.
2. Exprimer la grandeur à optimiser $f(x)$.
3. Dériver, étudier le signe de f', dresser le tableau de variations.
4. Conclure : valeur optimale et valeur de x correspondante.

Exemple

Boîte sans couvercle fabriquée à partir d'un carré de 12 cm en découpant des carrés de côté x aux coins : $V(x)=x(12-2x)^2$ sur $]0;6[$. $V'(x)=(12-2x)(12-6x)$, maximum en $x=2$: $V=128\ \text{cm}^3$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment dériver une fonction composée en première ?

$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u^n)'=nu'u^{n-1}$, $(e^u)'=u'e^u$, $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$.

Quelles sont les variations de la fonction valeur absolue ?

$|x|=x$ si $x\geq 0$ et $-x$ sinon : décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$, avec un minimum 0 en 0 où elle n'est pas dérivable.

Comment étudier une fonction complètement ?

Ensemble de définition, dérivée, signe de la dérivée, tableau de variations, puis résolution des questions posées (extremum, équation, tangente).

Comment résoudre |x - a| = r ?

Les solutions sont $x = a + r$ et $x = a - r$; $|x - a| \leq r$ équivaut à $x \in [a - r ; a + r]$.