Fonctions usuelles

Les fonctions **circulaires réciproques** et **hyperboliques** complètent le catalogue du lycée ; leurs dérivées sont à connaître par cœur.

Définition — puissances réelles

Pour $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$: $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$; $x^{\alpha+\beta}=x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}$.
Croissances comparées : $\ln x\ll x^\alpha\ll e^x$ en $+\infty$ ($\alpha>0$).

Définition — arcsin, arccos, arctan

$\arcsin:[-1;1]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, impaire, $\arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\arccos:[-1;1]\to[0;\pi]$, $\arccos'x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. $\arctan:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, impaire, $\arctan'x=\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\pm\frac{\pi}{2}$ selon le signe de x.

À retenir

$\sin(\arcsin x)=x$ toujours, mais $\arcsin(\sin x)=x$ seulement si $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Définition — fonctions hyperboliques

$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (paire, convexe), $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (impaire, croissante), $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ (à valeurs dans $]-1;1[$). $\operatorname{ch}'=\operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}'=\operatorname{ch}$, $\operatorname{th}'=1-\operatorname{th}^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$. Identité : $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

Formules trigonométriques à connaître

$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$, $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$,
$\cos 2a=2\cos^2a-1=1-2\sin^2a$, $\sin 2a=2\sin a\cos a$, $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$,
$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$, $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la dérivée de arctan ?

$\arctan'x=\frac{1}{1+x^2}$; $\arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos'x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$.

Pourquoi arcsin(sin x) n'est pas toujours égal à x ?

Parce que $\arcsin$ est la réciproque de $\sin$ restreint à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: l'égalité $\arcsin(\sin x)=x$ n'est vraie que sur cet intervalle.

Que valent ch, sh et th ?

$\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, avec $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

Comment définir x^α pour α réel ?

Pour $x>0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$; c'est la seule façon cohérente de donner un sens à $2^{\sqrt{2}}$ par exemple.