Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Définition — fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$: c'est la fonction **exponentielle**, notée $\exp(x) = e^x$, avec $e = \exp(1) \approx 2{,}718$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels a, b et entier n :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^n = e^{na}.$$

Théorème — signe et variations

$e^x > 0$ pour tout x. La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$: $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Propriété — dérivée de e^{kx}

$(e^{kx+m})' = k\, e^{kx+m}$. La fonction $x \to e^{kx}$ est croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

Propriété — lien avec les suites géométriques

$(e^{kn})_n$ est géométrique de raison e^k. Un taux d'évolution continu s'écrit $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Méthode — résoudre

$e^{2x-1} = e^{x+3} \Leftrightarrow 2x-1 = x+3 \Leftrightarrow x = 4$. $e^{3x} \leq 1 \Leftrightarrow 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ (car $1 = e^0$).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce que la fonction exponentielle ?

L'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle est strictement positive et strictement croissante.

Quelles sont les propriétés de l'exponentielle ?

$e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $(e^a)^n = e^{na}$, $e^0 = 1$.

Comment dériver e^{kx} ?

$(e^{kx})' = ke^{kx}$; plus généralement $(e^u)' = u'e^u$.

Comment résoudre une équation avec des exponentielles ?

On utilise le fait que $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, après avoir tout écrit sous forme d'une seule exponentielle de chaque côté.