Espaces vectoriels normés et topologie

En **dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes, les compacts sont les fermés bornés et les applications linéaires sont continues.

Définition — norme

$N : E \to \mathbb{R}_+$ avec $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$: $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$; sur les fonctions : $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1 = \int |f|$, $\|f\|_2$. Deux normes sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha N \leq N' \leq \beta N$.

Théorème — dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes ; une suite converge ssi ses coordonnées convergent ; les parties compactes sont les **fermés bornés** ; toute application linéaire (ou multilinéaire) est continue ; tout sous-espace est fermé ; l'espace est complet.

Définition — topologie

Ouvert : voisinage de chacun de ses points (réunion de boules ouvertes) ; fermé : complémentaire d'un ouvert, ou **caractérisation séquentielle** : toute suite convergente de F a sa limite dans F. Intérieur $[\mathring{}]A$ (plus grand ouvert inclus), adhérence $\overline{A}$ (plus petit fermé contenant ; $x \in \overline{A}$ ssi limite d'une suite de A), frontière $\overline{A} \setminus [\mathring{}]A$. Images réciproques d'ouverts (fermés) par une application continue : ouverts (fermés).

Définition — compacité

K est compact si toute suite de K admet une sous-suite convergeant dans K (Bolzano-Weierstrass). Un compact est fermé borné ; un fermé dans un compact est compact ; un produit de compacts est compact. L'image d'un compact par une application continue est compacte : une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est **bornée et atteint ses bornes** ; théorème de Heine.

Définition — continuité des applications linéaires

$u \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est continue ssi elle est bornée sur la boule unité, ssi $\exists C$, $\|u(x)\| \leq C\|x\|$; norme subordonnée $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, sous-multiplicative. Applications lipschitziennes.

Définition — connexité par arcs

A est connexe par arcs si deux points quelconques sont reliés par un chemin continu dans A. Les convexes le sont ; l'image continue d'un connexe par arcs l'est ; les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (généralisation du TVI).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Pourquoi les normes sont-elles équivalentes en dimension finie ?

Parce que la sphère unité est compacte : toute norme y est continue, bornée et atteint ses bornes, ce qui donne l'encadrement $\alpha N \leq N' \leq \beta N$.

Comment montrer qu'une partie est fermée ?

Par la caractérisation séquentielle (toute suite convergente de la partie a sa limite dedans) ou comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Qu'est-ce qu'un compact ?

Une partie dont toute suite admet une sous-suite convergeant dans la partie. En dimension finie, ce sont exactement les fermés bornés.

Comment montrer qu'une application linéaire est continue ?

En trouvant C tel que $\left|u(x)\right| \leq C|x|$ pour tout x. En dimension finie, c'est automatique.