Espaces vectoriels et dimension finie

En dimension finie, une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est une **base** dès qu'elle est libre ou génératrice.

Définition — sous-espace vectoriel

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si $0 \in F$ et si F est stable par combinaison linéaire : $\forall x,y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x+y \in F$. Exemples : noyau et image d'une application linéaire, ensemble des solutions d'un système homogène, $\mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_p)$.

Définition — familles libres, génératrices, bases

$(x_1,\ldots,x_p)$ est **libre** si $\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow$ tous les λ_i nuls ; **génératrice** si $\mathrm{Vect}(x_i) = E$; **base** si les deux (tout vecteur a des coordonnées uniques). Une famille contenant 0 ou deux vecteurs colinéaires est liée.

Théorème — dimension

Si E admet une base finie, toutes ses bases ont le même cardinal, la **dimension** $\dim E$. Théorème de la **base incomplète** : toute famille libre se complète en une base ; de toute famille génératrice on peut extraire une base. En dimension n : une famille libre a au plus n vecteurs, une génératrice au moins n ; une famille de n vecteurs libre ou génératrice est une base.

Définition — somme, somme directe, supplémentaires

$F+G = \{f+g\}$; la somme est **directe** ($F \oplus G$) si $F \cap G = \{0\}$, i.e. toute décomposition est unique. F et G sont **supplémentaires** si $F \oplus G = E$. Tout sous-espace admet des supplémentaires (non uniques).

Formule de Grassmann

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

$F \oplus G = E \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Définition — rang

Le rang d'une famille est la dimension de l'espace qu'elle engendre. Rang d'une application linéaire u : $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment montrer qu'une famille est libre ?

On suppose $\sum \lambda_i x_i = 0$ et on montre que tous les λ_i sont nuls.

Qu'est-ce que la formule de Grassmann ?

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Comment montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires ?

Il suffit de montrer $F\cap G=\{0\}$ et $\dim F+\dim G=\dim E$, ou que tout vecteur se décompose de façon unique.

Que dit le théorème de la base incomplète ?

Toute famille libre peut être complétée en une base ; de toute famille génératrice on peut extraire une base.