# Espaces préhilbertiens et euclidiens

Le **théorème spectral** : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

### Définition — produit scalaire, norme

Forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot;\cdot \rangle$ ; $|x| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$. **Cauchy-Schwarz** : $|\langle x,y \rangle| \leq |x||y|$ avec égalité ssi $x$, $y$ colinéaires. Inégalité triangulaire ; identité du parallélogramme ; polarisation $\langle x,y \rangle = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$. Exemples :

$\langle X,Y \rangle = X^T Y$ sur $\mathbb{R}^n$, $\langle f,g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b])$, $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

### Définition — orthogonalité, Gram-Schmidt

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. **Pythagore** : $x \perp y \Leftrightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. Le procédé de **Gram-Schmidt** transforme toute famille libre $(x_i)$ en une famille orthonormale $(e_i)$ avec $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}(x_1,\ldots,x_k)$. Tout espace euclidien admet une base orthonormée ; dans une telle base, $\langle x,y \rangle = \sum x_i y_i$ et $x = \sum \langle x,e_i \rangle e_i$.

### Théorème — projection orthogonale

Si $F$ est de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$ et la projection orthogonale sur $F$ est $p_F(x) = \sum_i \langle x,e_i \rangle e_i$ pour $(e_i)$ base orthonormée de $F$. **Distance** : $d(x,F) = |x - p_F(x)| = \min_{y \in F} |x-y|$ ; inégalité de Bessel $\sum \langle x,e_i \rangle^2 \leq |x|^2$.

### Définition — endomorphismes symétriques

$u$ est **symétrique** (autoadjoint) si $\langle u(x),y \rangle = \langle x,u(y) \rangle$ ; en base orthonormée, sa matrice est symétrique. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

### Théorème spectral

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée. Matriciellement : pour toute $S$ symétrique réelle, il existe $P$ orthogonale ( $P^{-1} = P^T$ ) avec $P^T S P$ diagonale. Une matrice symétrique est **positive** (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont $\geq 0$ (resp. $>0$).

### Définition — isométries, matrices orthogonales

$u$ est une isométrie si $|u(x)| = |x|$ ; équivaut à conserver le produit scalaire, à envoyer une base orthonormée sur une base orthonormée, à $A^T A = I_n$. Groupe orthogonal $O(n)$, $\det = \pm 1$ ; $SO(n)$ (déterminant $1$). En dimension $2$ : rotations $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et réflexions. En dimension $3$ : toute rotation est une rotation d'axe une droite, d'angle $\theta$

avec $\mathrm{tr} = 1+2\cos\theta$.

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Que dit le théorème spectral ?

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée : $S = PDP^T$ avec $P$ orthogonale.

### Comment orthonormaliser une famille avec Gram-Schmidt ?

On retire à chaque vecteur ses projections sur les précédents déjà orthonormalisés, puis on normalise.

### Comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ?

$d(x,F) = \left|x - p_F(x)\right|$ où $p_F$ est la projection orthogonale ; avec une base orthonormée $(e_i)$ de $F$, $p_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$.

### Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?

Une matrice $A$ telle que $A^T A = I_n$ ; ses colonnes forment une base orthonormée et $\det A = \pm 1$.