Équations différentielles linéaires

Solution générale = solution de l'**équation homogène** + une **solution particulière**.

Théorème — premier ordre $y'+a(x)y=b(x)$

a, b continues sur I, A primitive de a. Solutions de l'équation homogène : $y=Ce^{-A(x)}$. Solution particulière par **variation de la constante** : $y=C(x)e^{-A(x)}$ avec $C'(x)=b(x)e^{A(x)}$. Le problème de Cauchy $y(x_0)=y_0$ a une unique solution sur I.

Théorème — second ordre $y''+ay'+by=0$ **(coefficients constants)**

Équation caractéristique $r^2+ar+b=0$, discriminant Δ :

- $\Delta>0$, racines $r_1\neq r_2$: $y=\lambda e^{r_1 x}+\mu e^{r_2 x}$;
- $\Delta=0$, racine double r : $y=(\lambda x+\mu)e^{rx}$;
- $\Delta<0$, racines $\alpha\pm i\beta$: $y=e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x)$.

Le problème de Cauchy ($y(x_0)$, $y'(x_0)$ donnés) a une unique solution.

Méthode — second membre $P(x)e^{\lambda x}$

On cherche une solution particulière de la forme $Q(x)e^{\lambda x}$ avec $\deg Q=\deg P$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $\deg Q=\deg P+1$ si racine simple, $+2$ si racine double. Second membre $\cos$ ou $\sin$: passer par le complexe $e^{i\omega x}$ et prendre partie réelle ou imaginaire. **Principe de superposition** pour une somme de seconds membres.

Exemple

$y''+y=\cos x$: i est racine de r^2+1, on cherche $z=Axe^{ix}$ pour $z''+z=e^{ix}$: $A=\frac{1}{2i}$, d'où $y_p=\mathrm{Re}\left(\frac{x}{2i}e^{ix}\right)=\frac{x}{2}\sin x$. Solution générale : $\lambda\cos x+\mu\sin x+\frac{x}{2}\sin x$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment résoudre y' + a(x)y = b(x) ?

Solution homogène $Ce^{-A(x)}$ avec A primitive de a, puis variation de la constante : $C'(x)=b(x)e^{A(x)}$.

Comment résoudre y'' + ay' + by = 0 ?

Avec l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$: deux racines réelles donnent $\lambda e^{r_1 x}+\mu e^{r_2 x}$, une racine double $(\lambda x+\mu)e^{rx}$, deux racines complexes $e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x+\mu\sin\beta x)$.

Synthèse téléchargée depuis https://mathovore.fr/resume-cours-maths/sup/equations-differentielles-lineaires.html – Mathovore, site de maths.

Comment trouver une solution particulière avec un second membre en e^{λx} ?

On cherche $Q(x)e^{\lambda x}$ avec $\deg Q$ augmenté de 1 ou 2 si λ est racine simple ou double de l'équation caractéristique.

Qu'est-ce que le principe de superposition ?

Si y_1 est solution pour le second membre b_1 et y_2 pour b_2, alors y_1+y_2 est solution pour b_1+b_2.