Équations différentielles linéaires et systèmes

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de taille n est un **espace vectoriel de dimension** n ; à coefficients constants, la solution est $e^{tA}X_0$.

Théorème — Cauchy linéaire

Pour $A:I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B:I\to\mathbb{K}^n$ continues, tout problème de Cauchy $X'=A(t)X+B(t)$, $X(t_0)=X_0$ admet une **unique solution** définie sur I tout entier. Les solutions de l'équation homogène forment un sous-espace S_H de dimension n ; les solutions de l'équation complète forment un espace affine X_p+S_H.

Définition — système fondamental, wronskien

Une base $(X_1,\dots,X_n)$ de S_H est un **système fondamental** ; le **wronskien** $W(t)=\det(X_1(t),\dots,X_n(t))$ ne s'annule jamais ou est identiquement nul. **Variation des constantes** : $X_p=\sum c_i(t)X_i$ avec $\sum c_i'(t)X_i(t)=B(t)$.

Définition — exponentielle de matrice

$e^A=\sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{k!}$ (série normalement convergente). $e^{A+B}=e^Ae^B$ si $AB=BA$; $e^{PDP^{-1}}=Pe^DP^{-1}$; $\det e^A=e^{\operatorname{tr}A}$; $t\to e^{tA}$ est dérivable de dérivée Ae^{tA}.

Théorème — coefficients constants

Les solutions de $X'=AX$ sont les $X(t)=e^{tA}X_0$. En pratique : réduire A. Si $A=PDP^{-1}$ avec $D=\operatorname{diag}(\lambda_i)$, les solutions sont $\sum c_ie^{\lambda_it}V_i$ (V_i vecteurs propres). Si A est trigonalisable seulement, on résout le système triangulaire de bas en haut (solutions polynômes-exponentielles).

Définition — équation scalaire d'ordre 2

$y''+a(t)y'+b(t)y=c(t)$ se ramène au système en (y,y'). Espace des solutions homogènes de dimension 2 ; wronskien $W=y_1y_2'-y_1'y_2$ vérifiant $W'=-aW$. Si l'on connaît une solution y_1 ne s'annulant pas, on cherche $y=y_1z$ (**abaissement de l'ordre**). Variation des constantes : $y=c_1y_1+c_2y_2$ avec $c_1'y_1+c_2'y_2=0$ et $c_1'y_1'+c_2'y_2'=c$.

Exemple

$X'=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X$: $e^{tA}=e^t\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$, donc $x(t)=(x_0+y_0t)e^t$, $y(t)=y_0e^t$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de Cauchy linéaire ?

Pour A et B continues sur I, tout problème de Cauchy $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ admet une unique solution définie sur I tout entier.

Comment résoudre X' = AX à coefficients constants ?

$X(t) = e^{tA}X_0$. En pratique, on diagonalise ou trigonalise A : les solutions sont des combinaisons de $e^{\lambda t}V$ pour les vecteurs propres V.

Qu'est-ce que le wronskien ?

Le déterminant $W(t)$ d'un système de solutions ; il est soit identiquement nul, soit jamais nul, et permet de vérifier qu'on a un système fondamental.

Comment résoudre une équation d'ordre 2 dont on connaît une solution ?

On pose $y = y_1 z$ (abaissement de l'ordre) : on obtient une équation d'ordre 1 en z'.