Ensembles de nombres et calcul numérique

De $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$: chaque ensemble contient le précédent, et $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas rationnels.

Définition — ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ (entiers naturels) $\subset \mathbb{Z}$ (entiers relatifs) $\subset \mathbb{D}$ (décimaux) $\subset \mathbb{Q}$ (rationnels $\frac{p}{q}$) $\subset \mathbb{R}$ (réels). $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\notin \mathbb{D}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\notin \mathbb{Q}$.

Propriété — racines carrées

Pour $a, b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b>0)$, $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = |a|$. Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général.

Exemple

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Définition — valeur absolue

$|x|$ est la distance de x à 0 : $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x<0$. $|a-b|$ est la distance entre a et b. $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [1;5]$.

Définition — nombre pair, impair, multiple

n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$; impair si $n = 2k+1$. Le carré d'un impair est impair : $(2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$.

Méthode — raisonnement

Un **contre-exemple** suffit pour réfuter une affirmation universelle. La **réciproque** de « si P alors Q » est « si Q alors P » ; elle peut être fausse. « $P \Leftrightarrow Q$ » signifie que les deux implications sont vraies.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quels sont les ensembles de nombres ?

$\mathbb{N}$ (entiers naturels) $\subset \mathbb{Z}$ (entiers relatifs) $\subset \mathbb{D}$ (décimaux) $\subset \mathbb{Q}$ (rationnels) $\subset \mathbb{R}$ (réels).

Comment savoir si un nombre est rationnel ?

Un nombre est rationnel s'il s'écrit comme quotient de deux entiers. $\frac{1}{3}$ l'est, $\sqrt{2}$ et π ne le sont pas : ils sont irrationnels.

Comment simplifier une racine carrée ?

On fait apparaître un carré parfait sous la racine : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$. Règles : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, mais $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Pourquoi 1/3 n'est-il pas un nombre décimal ?

Parce que son écriture décimale $0{,}333\ldots$ est infinie : un nombre décimal doit s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule, ce qui revient à avoir un dénominateur de la forme $2^a 5^b$.