Développements limités

Un DL remplace localement une fonction par un **polynôme** : c'est l'outil universel pour les limites et les équivalents.

Définition — développement limité

f admet un DL à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $f(x)=P(x)+o(x^n)$. Il est unique ; sa partie régulière P est paire (resp. impaire) si f l'est. Un DL d'ordre 1 équivaut à la dérivabilité.

Propriété — DL usuels en 0

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.+x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\quad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+[\text{raiseox?}]3.\,.[\text{hspacce?}]1.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\quad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\quad \operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\quad \operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

Propriété — opérations

Somme et produit (on tronque à l'ordre voulu) ; quotient (multiplier par le DL de $\frac{1}{1+u}$) ; **composition** $f(u(x))$ quand $u(x)\to 0$; **intégration** terme à terme (avec la constante $f(0)$) ; dérivation possible si f est $\mathcal{C}^n$.

Méthode — applications

- Limite d'une forme indéterminée : développer numérateur et dénominateur au même ordre.
- Équivalent : le premier terme non nul du DL.
- Position par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.
- Asymptote en $\pm\infty$: DL en $\frac{1}{x}$ de $\frac{f(x)}{x}$.

Exemple

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$ car $e^x-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment composer deux développements limités ?

On remplace x par le DL de $u(x)$ dans celui de f, à condition que $u(x)\to 0$, et on tronque à l'ordre voulu.

Comment calculer le DL de tan x ?

En divisant les DL de $\sin$ et $\cos$, ou par intégration de $1+\tan^2$:
$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$.

À quel ordre faut-il développer pour calculer une limite ?

Jusqu'à obtenir un terme non nul au numérateur et au dénominateur après simplification ; si tout s'annule, on augmente l'ordre.

Comment trouver une asymptote oblique avec un DL ?

On pose $h=\frac{1}{x}$ et on développe $\frac{f(x)}{x}$ ou $f(x)$ en h : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donne l'asymptote $y=ax+b$ et la position selon le signe de c.