Dérivation, Rolle, accroissements finis, Taylor

Rolle ⇒ accroissements finis ⇒ Taylor : une chaîne de théorèmes qui relie les valeurs d'une fonction à ses dérivées.

Définition — dérivabilité

f dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie $f'(a)$, i.e. $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h)$. Dérivable ⇒ continue (réciproque fausse : $|x|$ en 0). Formules : $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, $(g\circ f)'=f'\cdot g'\circ f$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Théorème — Rolle

Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème — accroissements finis

Égalité : f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$: $\exists c\in]a;b[$, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. **Inégalité** : si $|f'|\le M$ sur $]a;b[$, alors $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$ (f est M-lipschitzienne).

Propriété — conséquences

$f'=0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ constante ; $f'\ge 0\Leftrightarrow f$ croissante ; $f'>0$ (sauf en des points isolés) $\Rightarrow f$ strictement croissante. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue en a et $f'(x)\to\ell$ quand $x\to a$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$.

Définition — classe $\mathcal{C}^n$, Leibniz

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe et est continue. Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}[\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$.

Formules de Taylor

Pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$:

- **Reste intégral** : $f(x)=P_n(x)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$.
- **Taylor-Lagrange** (inégalité) : $|f(x)-P_n(x)|\le\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup|f^{(n+1)}|$.
- **Taylor-Young** (f de classe $\mathcal{C}^n$) : $f(x)=P_n(x)+o\big((x-a)^n\big)$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre Taylor-Lagrange et Taylor-Young ?

Taylor-Young est local ($o((x-a)^n)$), utile pour les DL et les limites. Taylor-Lagrange est global : il majore l'erreur sur tout un intervalle avec $\sup|f^{(n+1)}|$.

Que dit le théorème de Rolle ?

Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$, il existe $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Comment utiliser l'inégalité des accroissements finis ?

Si $|f'|\leq M$ sur un intervalle, alors $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$; cela sert pour les suites récurrentes contractantes et pour prouver qu'une fonction est lipschitzienne.

Qu'est-ce que la formule de Leibniz ?

$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}[\binom?]nk f^{(k)}g^{(n-k)}$, l'analogue du binôme pour la dérivée n-ième d'un produit.