Dérivation : composées et convexité

Une fonction est **convexe** sur I quand sa courbe est au-dessus de ses tangentes, ce qui équivaut à $f'' \geq 0$.

Théorème — dérivée d'une composée

$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$. Cas particuliers :

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(e^u)' = u'e^u$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\cos u)' = -u'\sin u$ $(\sin u)' = u'\cos u$.

Définition — convexité

f dérivable sur I est **convexe** si sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, **concave** si elle est en dessous. Autrement dit, f est convexe si f' est croissante.

Théorème — caractérisation par f''

Si f est deux fois dérivable sur I : f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I ; f concave $\Leftrightarrow f'' \leq 0$.

Définition — point d'inflexion

Point où la courbe **traverse sa tangente**, c'est-à-dire où f'' s'annule **en changeant de signe**.

Exemple

$f(x) = x^3$: $f''(x) = 6x$; concave sur $]-\infty;0]$, convexe sur $[0;+\infty[$, inflexion en 0. $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $\ln$ est concave sur $]0;+\infty[$.

Inégalités par convexité

$e^x \geq 1+x$ pour tout x (courbe au-dessus de la tangente en 0) ; $\ln x \leq x-1$ pour $x>0$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment dériver une fonction composée ?

$(g \circ u)' = u' \times g' \circ u$: par exemple $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(e^u)' = u'e^u$, $(\cos u)' = -u'\sin u$.

Comment savoir si une fonction est convexe ?

Une fonction dérivable deux fois est convexe sur un intervalle ssi $f'' \geq 0$ (sa courbe est au-dessus de ses tangentes) ; concave ssi $f'' \leq 0$.

Qu'est-ce qu'un point d'inflexion ?

Un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où f'' s'annule en changeant de signe.

À quoi sert la convexité ?

À démontrer des inégalités : par exemple $e^x \geq 1+x$ car l'exponentielle est convexe et $y = 1+x$ est sa tangente en 0.