Dérivation

Le **nombre dérivé** est la pente de la tangente ; le **signe de la dérivée** donne les variations.

Définition — nombre dérivé

f est dérivable en a si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie quand $h \to 0$. Cette limite est le **nombre dérivé** $f'(a)$: c'est le coefficient directeur de la **tangente** en a.

Propriété — équation de la tangente

Tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Propriété — dérivées usuelles

$f(x)$	k	x	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété — opérations

$(u+v)' = u'+v'$, $(ku)' = ku'$, $(uv)' = u'v+uv'$, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, $(g(ax+b))' = a\,g'(ax+b)$.

Théorème — dérivée et variations

Sur un intervalle I : si $f' \geq 0$ alors f est croissante ; si $f' \leq 0$, décroissante ; si $f' = 0$, constante. Si f' s'annule **en changeant de signe** en x_0, f admet un extremum local en x_0.

Exemple

$f(x) = x^3-3x$: $f'(x) = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1)$. f est croissante sur $]-\infty;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$, croissante sur $[1;+\infty[$; maximum local 2 en -1, minimum local -2 en 1.

Questions fréquentes sur ce chapitre

À quoi sert la dérivée ?

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a ; le signe de f' donne les variations de f : $f'>0$ sur un intervalle signifie f croissante.

Quelles sont les formules de dérivation à connaître ?

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Comment trouver l'équation de la tangente ?

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Comment trouver un extremum avec la dérivée ?

On cherche les valeurs où f' s'annule en changeant de signe : de $+$ à $-$ pour un maximum, de $-$ à $+$ pour un minimum.