Dénombrement

Compter des **listes** (ordre, répétitions) ou des **parties** (sans ordre) : n^k, $n!$, $[\backslash binom?]nk$.

Principes de base

Additif : si $A\cap B=[\backslash varnothing?]$, $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}A+\mathrm{card}B$. **Multiplicatif** : $\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}A\times\mathrm{card}B$. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments : n^k (ordre, répétitions autorisées).

Définition — permutations, arrangements

Nombre de façons d'ordonner n éléments : $n!=n\times(n-1)\times[\backslash raiseox?]3.\,.[\backslash hspacce?]1.\times 1$ ($0!=1$). Nombre de k-uplets d'éléments **distincts** (arrangements) : $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Définition — combinaisons

Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (sans ordre, sans répétition) :

$$[\backslash binom?]nk=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

$[\backslash binom?]n0=[\backslash binom?]nn=1$, $[\backslash binom?]n1=n$, $[\backslash binom?]n2=\frac{n(n-1)}{2}$.

Propriétés

Symétrie $[\backslash binom?]nk=[\backslash binom?]nn-k$; **triangle de Pascal** $[\backslash binom?]nk+[\backslash binom?]nk+1=[\backslash binom?]n+1k+1$; $\sum_{k=0}^{n}[\backslash binom?]nk=2^n$ (nombre de parties d'un ensemble à n éléments).

Exemple

Nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 : $[\backslash binom?]325=201\,376$. Nombre de podiums (ordre) parmi 10 coureurs : $10\times9\times8=720$. Nombre de codes à 4 chiffres : 10^4.

Méthode — choisir le bon outil

Ordre compte et répétition possible : n^k. Ordre compte sans répétition : $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ordre ne compte pas : $[\backslash binom?]nk$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre combinaison et arrangement ?

Un arrangement tient compte de l'ordre ($\frac{n!}{(n-k)!}$ façons), une combinaison non ($[\backslash\text{binom?}]nk$ façons).

Comment calculer $[\backslash\text{binom?}]nk$?

$[\backslash\text{binom?}]nk=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, ou avec le triangle de Pascal :
$[\backslash\text{binom?}]nk+[\backslash\text{binom?}]nk+1=[\backslash\text{binom?}]n+1k+1$.

Combien y a-t-il de façons de ranger n objets ?

$n!=n\times(n-1)\times[\backslash\text{raiseox?}]3.\,.[\backslash\text{hspacce?}]1.\times1$ permutations. Par exemple $5!=120$.

Combien de parties possède un ensemble à n éléments ?

2^n , car chaque élément est ou non dans la partie. C'est aussi $\sum_k[\backslash\text{binom?}]nk$.