Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Le **théorème des valeurs intermédiaires** prouve l'existence (et l'unicité, cas monotone) d'une solution de $f(x)=k$.

Définition — continuité

f est **continue** en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$; continue sur I si elle l'est en tout point de I (courbe tracée sans lever le crayon). Toute fonction **dérivable** est continue ; les fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, $\exp$, $\ln$, $\sqrt{\ }$, $\cos$, $\sin$) sont continues sur leur ensemble de définition.

Théorème — valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins une solution** dans $[a;b]$.

Théorème — corollaire (fonction strictement monotone)

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a;b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution dans $[a;b]$. Le résultat s'étend aux intervalles ouverts ou infinis avec les limites.

Méthode — rédiger

Citer : continuité, stricte monotonie (souvent via f'), valeurs (ou limites) aux bornes, encadrement de k. Puis encadrer la solution par balayage ou **dichotomie** à la calculatrice.

Théorème — suites récurrentes

Si (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est solution de $f(\ell)=\ell$ (point fixe).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce que le théorème des valeurs intermédiaires ?

Si f est continue sur $[a;b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

Comment montrer qu'une équation a une unique solution ?

Avec le corollaire du TVI : f continue et strictement monotone sur $[a;b]$, et k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Une fonction dérivable est-elle continue ?

Oui, toute fonction dérivable est continue. La réciproque est fausse : la valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0.

Comment encadrer la solution d'une équation avec la calculatrice ?

Par balayage : on cherche deux valeurs consécutives (au pas voulu) où $f(x)-k$ change de signe.