Calcul différentiel

Une fonction est $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues ; ses extremums intérieurs sont des **points critiques**.

Définition — dérivées partielles, différentielle

$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$. f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire $df(a)$ avec $f(a+h) = f(a)+df(a)(h)+o(|h|)$. Alors f est continue, admet des dérivées selon tout vecteur, et $df(a)(h) = \sum h_i \partial_i f(a)$. La matrice de $df(a)$ est la **jacobienne** ; pour f à valeurs réelles, $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$ avec $\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a))$.

Théorème — classe $\mathcal{C}^1$

f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U ssi ses dérivées partielles existent et sont continues sur U ; alors f est différentiable. Opérations : somme, produit, composition ($d(g\circ f)(a) = dg(f(a))\circ df(a)$, jacobiennes qui se multiplient).

Règle de la chaîne

Pour $\gamma : t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ et f $\mathcal{C}^1$:

$$(f\circ\gamma)'(t) = \sum_i \partial_i f(\gamma(t))\, x_i'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle.$$

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau et indique la direction de plus grande pente. Une fonction $\mathcal{C}^1$ de différentielle nulle sur un ouvert connexe par arcs est constante.

Définition — dérivées secondes, Schwarz

f est $\mathcal{C}^2$ si ses dérivées partielles secondes existent et sont continues. **Théorème de Schwarz** : alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. La matrice **hessienne** $H_f(a) = \left(\partial_{ij} f(a)\right)$ est symétrique. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a)+\langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(|h|^2)$.

Théorème — extremums

Si f est différentiable sur un ouvert et admet un extremum local en a, alors $\nabla f(a) = 0$ (**point critique**). Réciproque fausse (point selle). Pour f $\mathcal{C}^2$ en un point critique : si $H_f(a)$ est définie positive, minimum local ; définie négative, maximum local ; valeurs propres de signes contraires, point selle. En dimension 2 avec $r = \partial_{xx} f$, $s = \partial_{xy} f$, $t = \partial_{yy} f$: $rt - s^2 > 0$ ⇒ extremum (min si $r > 0$), $rt - s^2 < 0$ ⇒ selle.

Méthode — extremums sur un compact

Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes : on cherche les points

> critiques à l'intérieur, puis on étudie f sur le bord (souvent paramétré).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre dérivées partielles et différentiabilité ?

L'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité ni même la continuité ; mais si elles sont continues, la fonction est $\mathcal{C}^1$ donc différentiable.

Comment trouver les extremums d'une fonction de deux variables ?

On cherche les points critiques ($\nabla f = 0$), puis on étudie la hessienne : $rt - s^2 > 0$ donne un extremum (minimum si $r > 0$), $rt - s^2 < 0$ un point selle.

Que représente le gradient ?

Le vecteur des dérivées partielles ; il est orthogonal aux lignes de niveau et indique la direction de plus forte croissance.

Que dit le théorème de Schwarz ?

Pour une fonction $\mathcal{C}^2$, l'ordre des dérivations partielles n'a pas d'importance : $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$.