Arithmétique : diviseurs, nombres premiers, fractions irréductibles

Tout entier supérieur à 1 se décompose de manière **unique** en produit de nombres premiers.

Définition — diviseur, multiple

a est **divisible** par b si le reste de la division euclidienne de a par b est nul ; on dit que b est un diviseur de a et a un multiple de b. Les diviseurs de 12 : $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

Définition — nombre premier

Un **nombre premier** a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$ (1 n'est pas premier.)

Théorème — décomposition en facteurs premiers

Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de façon unique (à l'ordre près) comme produit de nombres premiers. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Méthode — décomposer

On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre : $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Définition — fraction irréductible

Une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1. $\frac{84}{360} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{30}$.

Exemple

Deux feux clignotent toutes les 12 s et 18 s ; ils clignotent ensemble tous les 36 s (plus petit multiple commun, $36 = 2^2 \times 3^2$).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce qu'un nombre premier ?

Un entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont premiers ; 1 ne l'est pas.

Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

On divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Comment rendre une fraction irréductible ?

On décompose numérateur et dénominateur en facteurs premiers et on simplifie les facteurs communs, ou on divise par leur plus grand diviseur commun.

Quels sont les critères de divisibilité ?

Par 2 : dernier chiffre pair ; par 3 : somme des chiffres divisible par 3 ; par 5 : se termine par 0 ou 5 ; par 9 : somme des chiffres divisible par 9 ; par 10 : se termine par 0.