Applications linéaires et matrices

Le **théorème du rang** $\dim E = \dim\ker u + \operatorname{rg} u$ et l'**inversibilité** d'une matrice ($\det \neq 0$) structurent tout le chapitre.

Définition — application linéaire, noyau, image

$u : E \to F$ est linéaire si $u(\lambda x+y) = \lambda u(x)+u(y)$. $\ker u = \{x,\ u(x)=0\}$ (sous-espace de E), $\operatorname{Im} u = u(E)$ (sous-espace de F). u injective $\Leftrightarrow \ker u = \{0\}$. L'image d'une base engendre $\operatorname{Im} u$; u est déterminée par l'image d'une base.

Théorème du rang

Pour E de dimension finie :

$$\dim E = \dim\ker u + \operatorname{rg} u.$$

Si $\dim E = \dim F$: u injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.

Définition — projecteurs, symétries

p est un projecteur si $p \circ p = p$; alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$ et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$. s est une symétrie si $s \circ s = \mathrm{id}$; $s = 2p - \mathrm{id}$.

Définition — matrice d'une application linéaire

Dans des bases $\mathcal{B} = (e_j)$ de E et $\mathcal{C}$ de F, la colonne j de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$. $\operatorname{Mat}(v \circ u) = \operatorname{Mat}(v)\operatorname{Mat}(u)$; u bijective $\Leftrightarrow$ sa matrice est inversible, et $\operatorname{Mat}(u^{-1}) = \operatorname{Mat}(u)^{-1}$.

Propriété — calcul matriciel

Produit non commutatif ; $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Inverse par le pivot de Gauss sur $(A \mid I_n)$. Binôme de Newton pour A, B qui **commutent**.

Théorème — changement de base

P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (colonnes : nouveaux vecteurs dans l'ancienne base). Coordonnées : $X = PX'$. Endomorphisme : $A' = P^{-1}AP$ (matrices **semblables**, même trace, même déterminant, même rang).

Définition — déterminant

Forme n-linéaire alternée ; $\det(AB) = \det A \det B$, $\det A^T = \det A$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Développement selon une ligne ou une colonne ; déterminant triangulaire = produit des coefficients diagonaux ; échanger deux lignes change le signe, ajouter à une ligne une combinaison des autres ne change rien.

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

> **Méthode — systèmes linéaires**
> Pivot de Gauss : un système $AX = B$ à n inconnues et n équations a une unique solution ssi $\det A \neq 0$ (système de Cramer). Sinon, il a zéro ou une infinité de solutions ; l'ensemble des solutions de $AX = 0$ est un sous-espace de dimension $n - \operatorname{rg} A$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème du rang ?

$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$. En dimension finie égale au départ et à l'arrivée, injective, surjective et bijective sont équivalentes.

Comment inverser une matrice ?

Par le pivot de Gauss sur $(A | I_n)$, ou pour une 2×2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Que sont deux matrices semblables ?

$A' = P^{-1}AP$: elles représentent le même endomorphisme dans deux bases. Elles ont même trace, même déterminant et même rang.

Comment calculer un déterminant 3×3 ?

Par développement selon une ligne ou une colonne, ou par la règle de Sarrus, ou en se ramenant à une matrice triangulaire par opérations sur les lignes.