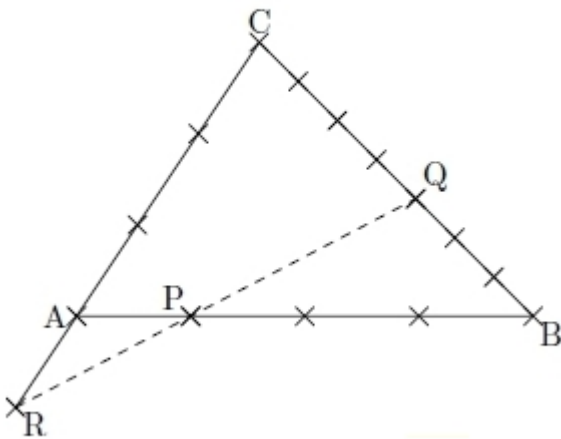


Vecteurs et translation

Exercice 1 :

Les points P, Q et R sont-ils alignés ?

Oui ils sont alignés, montrez que les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont colinéaires



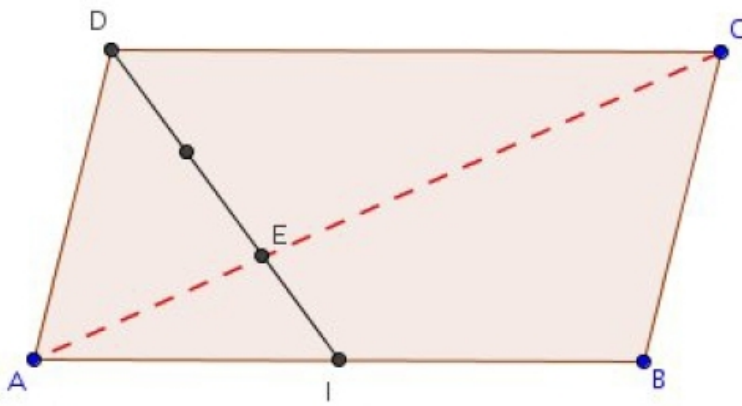
Exercice 2 :

ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu de [AB].

E est le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

1. Effectuer la figure suivante.



2. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

3. Les points A, E et C sont-ils alignés ?

Oui ils sont alignés, montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 3 :

A et B sont deux points distincts du plan .

On définit le point M par la relation vectorielle suivante :

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} .$$

1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Utilisons la relation de Chasles :

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

2. Placer le point M .

Exercice 4 :

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M, N, P et Q sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

1.

a. Démontrer que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$.

Nous avons :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

de même :

$$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PD}$$

ainsi :

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$$

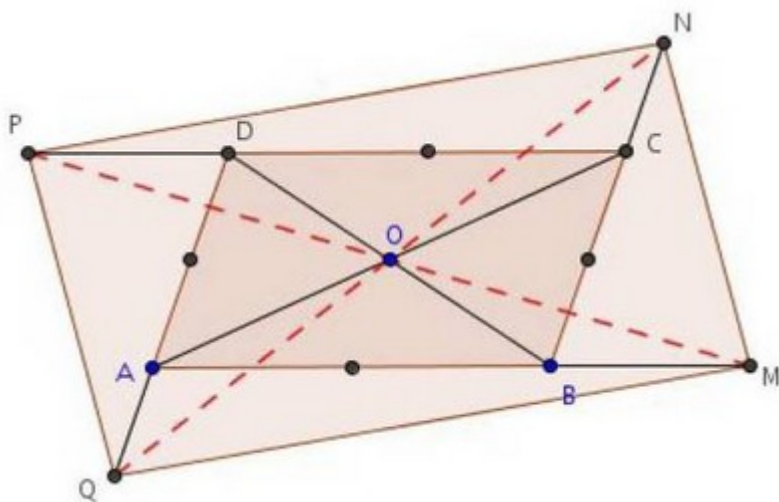
On en déduit que le quadrilatère MBPD est un parallélogramme.

b. Déduisez-en que O est le milieu de [MP] .

Propriété : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Conclusion :

Le point O est le milieu de [MP].



Exercice 5 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

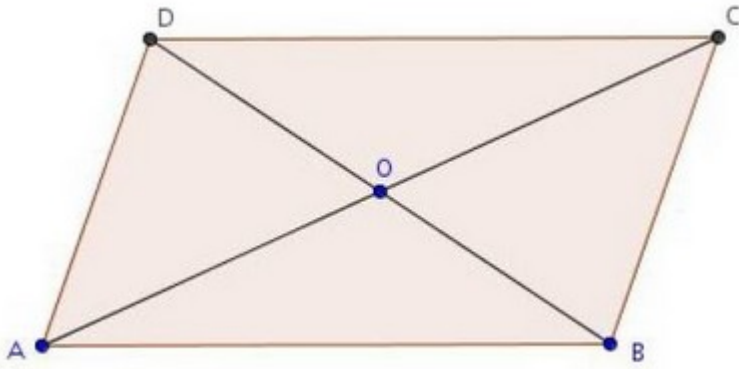
Donner l'ensemble des relations vectorielles possibles sur cette figure.

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

il y en a d'autres sur l'identité du parallélogramme

que vous aurez l'occasion de rencontrer dans d'autres exercices du site.



Exercice 6 :

(O, I, J) est un repère orthonormal avec $OI=OJ=1$ cm.

a. Placer les points.

b. Nous avons :

$$\vec{OA} = -4\vec{OI} + 6\vec{OJ} = -2\vec{OC} + 2\vec{OD}$$

car $\vec{OC} = 2\vec{OI}$, $\vec{OD} = 3\vec{OJ}$

Les coordonnées de A(-2;2) dans (O, C, D)

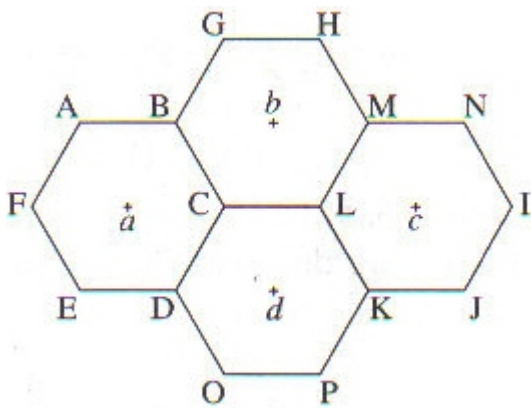
de même, montrer que les coordonnées sont B(-1;-1) dans (O, C, D) .

Dans le repère (O, D, C) , il suffit d'inverser abscisse et ordonnée.

c. Le point O a pour coordonné O(1;1) dans le repère (E, C, D) .

Exercice 7 :

La figure ci-dessous représente des hexagones réguliers de centres a, b, c, d.



1. Déterminer les images de chacun des points C, E, A, M par la translation de vecteur :

a. La translation de vecteur $\vec{AB}$ envoie C en L, E en D, A en B et M en N.

b. La translation de vecteur $\vec{BC}$ envoie C en d, A en a et M en c.

c. La translation de vecteur $\vec{AC}$ envoie C en K, E en O, A en C et M en I.

2. Utiliser la translation de vecteur $\vec{AC}$

Exercice 8 :

Démontrer que pour tous points A, B, C, D.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles.

Exercice 9 :

Dans un repère, on considère les points A(-5;3), B(2;-1), C(0;4).

a. Placer les points A,B,C.

b. $\overrightarrow{AB}(2 - (-5); -1 - 3) = (7; -4)$

c. $\overrightarrow{AC}(0 - (-5); 4 - 3) = (5; 1), \overrightarrow{BC} = (0 - 2; 4 - (-1)) = (-2; 5).$

e. $AB = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}.$

Exercice 11 :

1.
a. Avec GEOGEBRA, on peut construire le triangle ABC, ses milieux A', B' et C', ainsi que son centre de gravité G et son centre de cercle circonscrit O.

On peut ensuite construire le point H en ajoutant les vecteurs OA, OB et OC.

b. On sait que le centre de gravité G est le point d'intersection des médianes,

donc on peut écrire :

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

En multipliant cette équation par 2, on obtient :

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OA'}$$

Or, on a :

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{GB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB'}$$

$$\overrightarrow{GC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC'}$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$$

Et donc :

$$\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OA'}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{AP}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'}$$

c. On a :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OO'}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

En remplaçant $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AO}$ par les expressions trouvées précédemment, on obtient :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

On sait que $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ car les vecteurs représentant les côtés d'un triangle se fermant sur lui-même sont égaux à $\vec{0}$.

Donc :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{0} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OO'} = 0$$

Mais $\overrightarrow{OO'}$ est un vecteur perpendiculaire au plan du triangle, donc il est orthogonal à tous les vecteurs appartenant à ce plan.

En particulier, il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AP}$, donc (AP) est perpendiculaire à (BC).

d. On peut montrer de même que (BP) est perpendiculaire à (AC) en utilisant les mêmes calculs.

e. Le point H est le point de Steiner, c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds des hauteurs du triangle ABC.

2. On a montré que :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Donc :

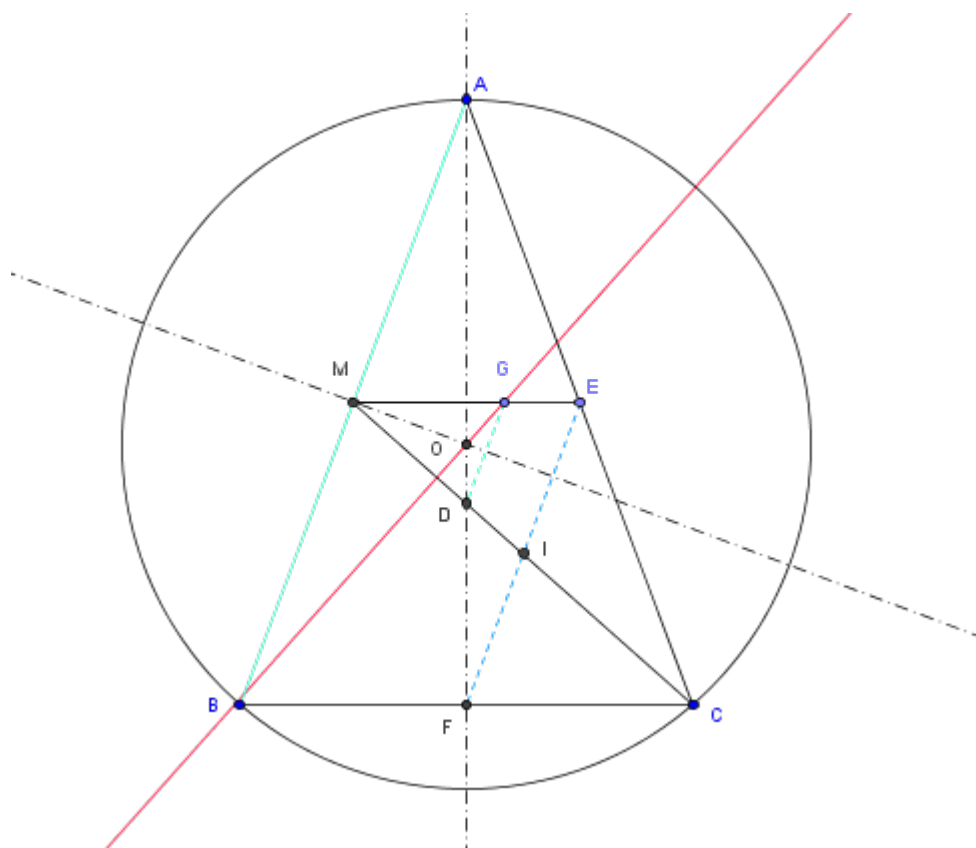
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - 2 \times \frac{1}{3}$$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA'} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG}$$

Donc $\overrightarrow{OH}$ est trois fois plus grand que $\overrightarrow{OG}$.

Cela signifie que le centre de gravité se trouve sur la droite d'Euler, car c'est le point qui divise la distance entre le centre du cercle circonscrit et le point de Steiner dans le rapport 2:1 (c'est-à-dire que OH est trois fois plus grand que OG).

Exercice 12 :



Analyse de la figure et remarques préliminaires.

(ME) est la droite des milieux donc (ME) et (BC) sont parallèles et $2.ME = BC$. On en déduit que $ME = BF = FC$

(AF) est l'axe de symétrie du triangle isocèle BAC donc (AF) est perpendiculaire à [BC] et [ME]

Dans le triangle AMC, [ME] est une médiane. Le centre de gravité G du triangle AMC est sur [ME] et l'on a : $MG = 2.GE$.

Démonstration

Considérons le quadrilatère MECF. Les cotés opposés [ME] et [CF] sont parallèles et isométriques. MECF est donc un parallélogramme; les diagonales [MC] et [EF] ont même milieu I.

Dans le triangle MEF, [MI] est une médiane, une autre médiane est portée par la droite (AF), il s'ensuit que le point D, intersection de deux médianes est le centre de gravité du triangle MEF.

Ainsi l'on a : $MD = 2 \times DI$.

Considérons alors le triangle MEI, d'une part les points M, G, E sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points M, D, I, et d'autre part on a les relations :

$$MD = 2 \times MI \text{ et } MG = 2 \times GE$$

Il s'ensuit d'après la réciproque du théorème de Thalès que les droites (GD) et (IE) sont parallèles.

F étant le milieu de [BC] et E le milieu de [AC] alors [EF] est parallèle à [AB]. Ainsi la droite (MO) médiatrice de [AB] est perpendiculaire à [GD]. (car (MO) est perpendiculaire à [EF] donc à [EI] et par suite à [GD])

Considérons finalement le triangle MGD

(DO) est perpendiculaire à [ME] et (MO) est perpendiculaire à (GD), il s'ensuit que O apparaît comme l'orthocentre du triangle MGD. La troisième hauteur étant portée par la droite (OG).

Conclusion :

Les droites (OG) et (MC) sont perpendiculaires.

Exercice 13 :

Désignons par A' le point diamétralement opposé au point A. Il s'ensuit alors que les deux angles

$\widehat{ABA'}$ et $\widehat{ACA'}$ sont droits (angles inscrits dans un demi-cercle)

Puisque les droites (BH) et (A'C) sont perpendiculaires à la droite (AC) alors elles sont parallèles. Il en est de même des droites (BA') et (CH) qui sont perpendiculaires à la droite (AB).

Ainsi le quadrilatère BHCA' est un parallélogramme puisque ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, donc $[HA'] \cap [BC] = \{M\}$. Ainsi le milieu M de [BC] appartient aussi à la droite (A'H).

Conséquences:

Les droites (A'H) et (MH) sont confondues. Les points A' , M , H , I sont donc alignés. Il en résulte que l'angle $\widehat{A'IA}$ est droit puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle.

Les droites (MH) et (AI) sont donc perpendiculaires

Exercice 14 :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne K (- 3 ; 5) et L(4 ; 2).

Déterminer l'abscisse du point M d'ordonnée - 2 tel que K, L et M soient alignés.

Pour que les points soient alignés il faut que les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{LM}$ soient colinéaires avec $M(x; -2)$.

Calculons les coordonnées de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{KL}(4+3; 2-5)$$

$$\overrightarrow{KL}(7; -3)$$

et

$$\overrightarrow{LM}(x-4; -2-2)$$

$$\overrightarrow{LM}(x-4; -4)$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si :

$$7 \times (-4) - (-3)(x-4) = 0$$

$$-28 + 3(x-4) = 0$$

$$-28 + 3x - 12 = 0$$

$$3x - 40 = 0$$

$$x = \frac{40}{3}$$

Conclusion : $M(\frac{40}{3}; -2)$.

Exercice 15 :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne A(2 ; - 3) B(0 ; - 3) C(- 3 ; 0).

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Réolvons un système :

$$\begin{pmatrix} x+3 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ \frac{-3+3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+3 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons les deux équations :

☒ donc

$$x = -4 \text{ et } y = 0$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont E(- 4 ; 0) .

2. Que peut-on dire des droites (CE) et (AB) ? Justifier.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaires, les droites (CE) et (AB) sont parallèles.

Exercice 16 :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne :

E(3 ; - 1) F(7 ; - 7) G(5 ; - 4).

Déterminer si les trois points E, F et G sont alignés.

Vérifions si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires alors les trois points seront alignés.

$$\overrightarrow{EF}(7-3; -7+1) \text{ donc } \overrightarrow{EF}(4; -6)$$

$$\overrightarrow{EG}(5-3; -4+1) \text{ donc } \overrightarrow{EG}(2; -3)$$

Nous remarquons que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EG}$ donc les vecteurs sont colinéaires

et les points E,F et G sont alignés.

Exercice 17 :

1. Les vecteurs $\vec{u}(1+\sqrt{3};4)$ et $\vec{v}(\frac{1}{2};\sqrt{3}-1)$ sont-ils colinéaires ?

Calculons le déterminant :

Conclusion : ces deux vecteurs sont colinéaires.

2. Déterminer m tel que les vecteurs $\vec{u}(2;m)$ et $\vec{v}(5;-1)$ soient colinéaires.

Le déterminant doit être nul :

$$2 \times (-1) - 5m = 0$$

$$-2 - 5m = 0$$

$$m =$$

Exercice 18 :

Soient A, B, C et D, quatre points quelconques du plan.

Montrer que :

$$3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$

Nous avons

$$3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC}$$

$$= 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{BC}$$

$$= 3\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$

$$= \vec{0} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$

$$= 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$

Exercice 19 :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{DB}$$

Conclusion : les points B et D sont confondus.

Exercice 20 :

A et B sont deux points distincts.

On cherche à construire le point M tel que :

$$3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1. Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont-ils colinéaires ? ont-ils le même sens ? ont-ils la même norme ?

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}$$

$$MA = \frac{4}{3}MB$$

Conclusion : ces deux vecteurs sont colinéaires de sens opposés et n'ont pas la même norme.

2. En utilisant la relation de Chasles, montrer que l'on a l'égalité :

$$7\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

On sait que :

$$3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$7\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

3. En déduire $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$$7\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$$

Construire le point M.

Exercice 21 :

Les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{2}; 1-\sqrt{3})$ et $\vec{v}(1+\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ sont-ils colinéaires ?

Calculons le déterminant :

$$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) - (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

$$= -2 - (1^2 - \sqrt{3}^2)$$

$$= -2 - (1-3)$$

$$= -2 - (-2)$$

$$= 0$$

Conclusion : ces deux vecteurs sont bien colinéaires.

Exercice 22 :

On considère un triangle ABC et les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

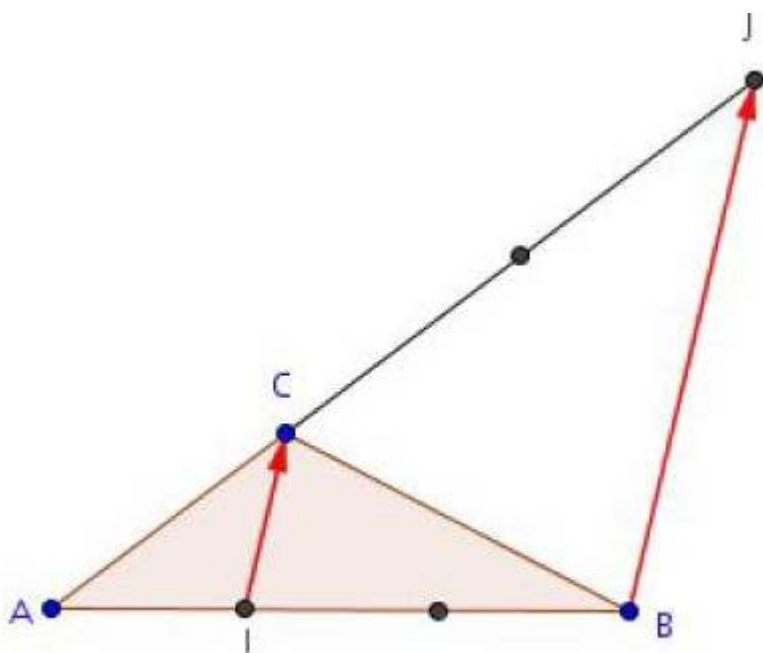
$$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$$

1. Montrer à l'aide de la relation de Chasles que $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$.

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{IC}$$

2. Que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (IC) ?

les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont donc colinéaires et on en déduit que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.



Exercice 23 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$.

Utilisons la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$$

$$2. \quad 2\overrightarrow{CB} - 9\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Utilisons la relation de Chasles

$$2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{CA} - 7\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{CD}$$

Exercice 24 :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.$$

Utilisons la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

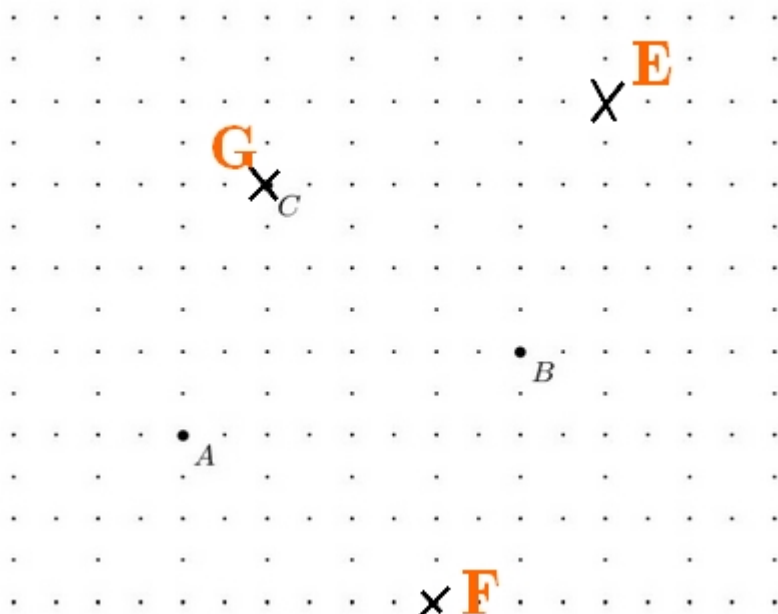
Conclusion : les points A et D sont confondus .

Exercice 25 :

$$1. \text{ Placer le point E tel que } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}.$$

$$2. \text{ Placer le point F tel que } \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AC}.$$

3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.



Exercice 30 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note E l'ensemble des points dont les coordonnées (x;y) vérifient la relation :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

On considère également les points F(4;0) et F'(-4;0).

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de E avec les axes du repères.

Lorsque x=0 , y=3 et y= -3.

Lorsque y=0, x=5 et x= - 5 .

2. A l'aide du logiciel Geogebra, visualiser l'ensemble E et faire une conjecture sur la somme des distances MF + MF' lorsque M est un point de E.

La distance MF+MF' est constante.

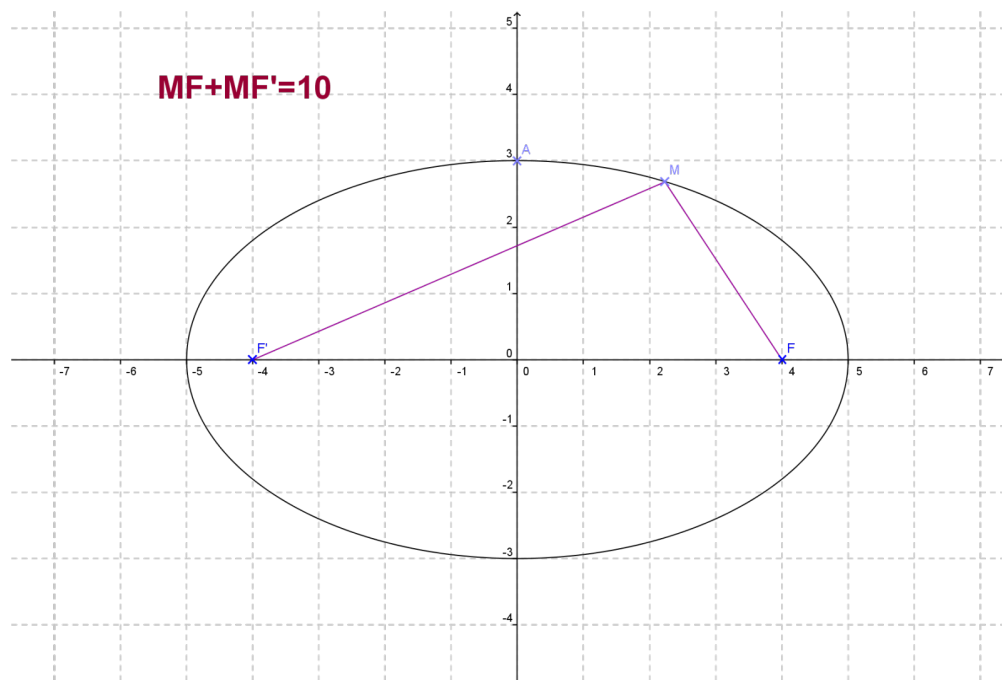
3. Soit M(x;y) un point de E.

a) Exprimer y^2 en fonction de x^2 et en déduire que $x^2 \leq 25$.

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

or $y^2 > 0$ ce qui est équivalent à dire que $1 - \frac{x^2}{25} \geq 0$ ce qui équivaut à $x^2 \leq 25$

b) Montrer que $MF^2 = \left(\frac{4}{5}x - 5\right)^2$.



c) Sachant que $x \leq 5$, montrer que $\frac{4}{5}x - 5 \leq 0$

puis en déduire que $MF = 5 - \frac{4}{5}x$.

d) Valider la conjecture .

Exercice 31 :

Soit ABCD est un parallélogramme .

1) Placer les points M et N définis par les égalités suivantes:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5} \times \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3} \times \overrightarrow{BA}$$

2) Montrer en utilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3} \times \overrightarrow{BA}$.

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$.

Indications :

Faire une figure et utiliser la relation de Chasles.

Exercice 32 :

1.a) Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu en un point I. Pour trouver les coordonnées de D, on peut utiliser le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

On a :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

En utilisant les coordonnées de A, B et C, on trouve :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de D sont (3, -1).

b) Le centre du parallélogramme est le milieu de ses diagonales, donc on peut calculer les coordonnées de I comme le milieu de AC et BD. On a :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de I sont (1, 2.5).

c) Pour trouver les coordonnées de F, on peut utiliser la formule donnant le symétrique d'un point par rapport à un autre :

$$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de F sont (-5, 5).

d) Pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{EI}$, on peut utiliser les coordonnées de E et de I :

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{FA}$, on peut utiliser les coordonnées de F et de A :

$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{FA}$ ont les mêmes coordonnées mais des signes opposés.

Cela n'est pas surprenant car dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, donc le vecteur qui relie un sommet à ce point de coupure a un opposé qui relie l'autre sommet à ce point de coupure. On peut donc prévoir cette propriété.

2.

a) On sait que $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{DM} = \vec{0}$.

En utilisant les coordonnées de A et D, on trouve :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En développant et simplifiant, on trouve :

$$4x_M + 11y_M = 23$$

Donc les coordonnées de M sont (x_M, y_M) avec $x_M = \frac{23 - 11y_M}{4}$.

b) Pour savoir si les points M, I et D sont alignés, on peut calculer le coefficient directeur de la droite (MD) et celui de la droite (ID) et vérifier s'ils sont égaux.

Le coefficient directeur d'une droite passant par deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est donné par :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MD}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M + 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{ID}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{ID} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Le coefficient directeur de la droite (MD) est donc :

$$m_{MD} = \frac{y_M + 1}{x_M - 3}$$

En substituant x_M par son expression en fonction de y_M , on obtient :

$$m_{MD} = \frac{-3y_M + 38}{11y_M - 23}$$

Le coefficient directeur de la droite (ID) est :

$$m_{ID} = \frac{3.5}{-2} = -\frac{7}{4}$$

On remarque que les coefficients directeurs sont différents, donc les points M, I et D ne sont pas alignés.

Exercice 33 :

méthode A

$$a) \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$b) \overrightarrow{PN} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AD}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et les droites (PN) et (BM) sont parallèles.

méthode B

a) A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) et D(0, 1)

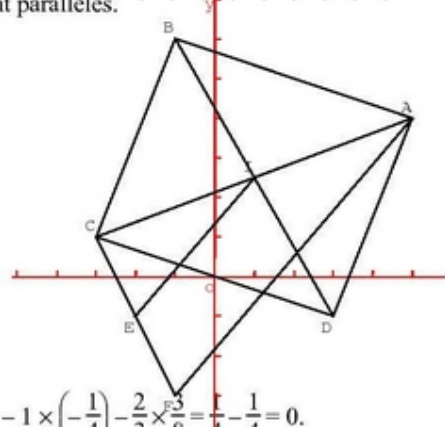
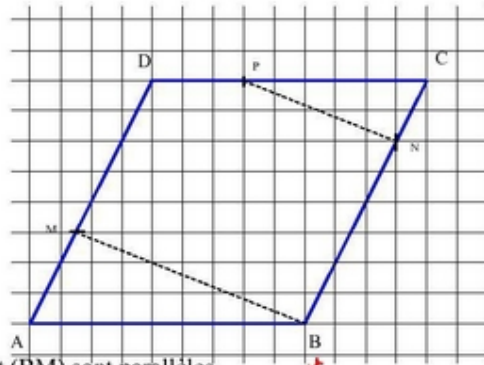
$$b) \overrightarrow{AM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} \text{ donc } M\left(0, \frac{3}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{3}{4}(1-1) \\ y-0 = \frac{3}{4}(1-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{4} \end{cases} \quad N\left(1, \frac{3}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{3}(0-1) \\ y-1 = \frac{2}{3}(1-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=1 \end{cases} \quad P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$c) \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{3}{8}-0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 1-1/3 \\ 3/4-1 \end{pmatrix} \text{ on a } (0-1) \times \left(\frac{3}{4}-1\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{8} = -1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires donc les droites (BM) et (PN) sont parallèles.



1.

a) Pour construire les points M, N et P, on peut tracer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ à partir des points A, B et C, dans les directions données par les coefficients des vecteurs. Les points M, N et P sont alors les extrémités de ces vecteurs.

b) On peut exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ en utilisant les définitions de M et N :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{NP} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} - (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PN}) \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CP} - (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CP}) \\ &= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{BN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

c) On remarque que $\overrightarrow{BM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, c'est-à-dire qu'il est contenu dans le plan du parallélogramme, et de même pour $\overrightarrow{PN}$.

Si les deux vecteurs sont contenus dans le même plan et qu'ils ont des directions différentes, alors ils

doivent être parallèles.

Donc (BM) et (PN) sont parallèles.

2.

a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées des points A, B, C et D sont :

A(0, 0)

B(1, 0)

C(1, 1)

D(0, 1)

b) Pour calculer les coordonnées des points M, N et P, on peut utiliser les définitions données dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BN} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc les coordonnées de M, N et P sont :

M(0, 3/8)

N(1, 3/4)

P(1/3, 1)

c) Comme les points M et N sont situés sur la même droite verticale AB, et que le point P a une ordonnée plus grande que celle de N et une ordonnée plus petite que celle de M, alors les droites (BM) et (PN) doivent être parallèles.

Cela confirme le résultat obtenu avec la méthode A.