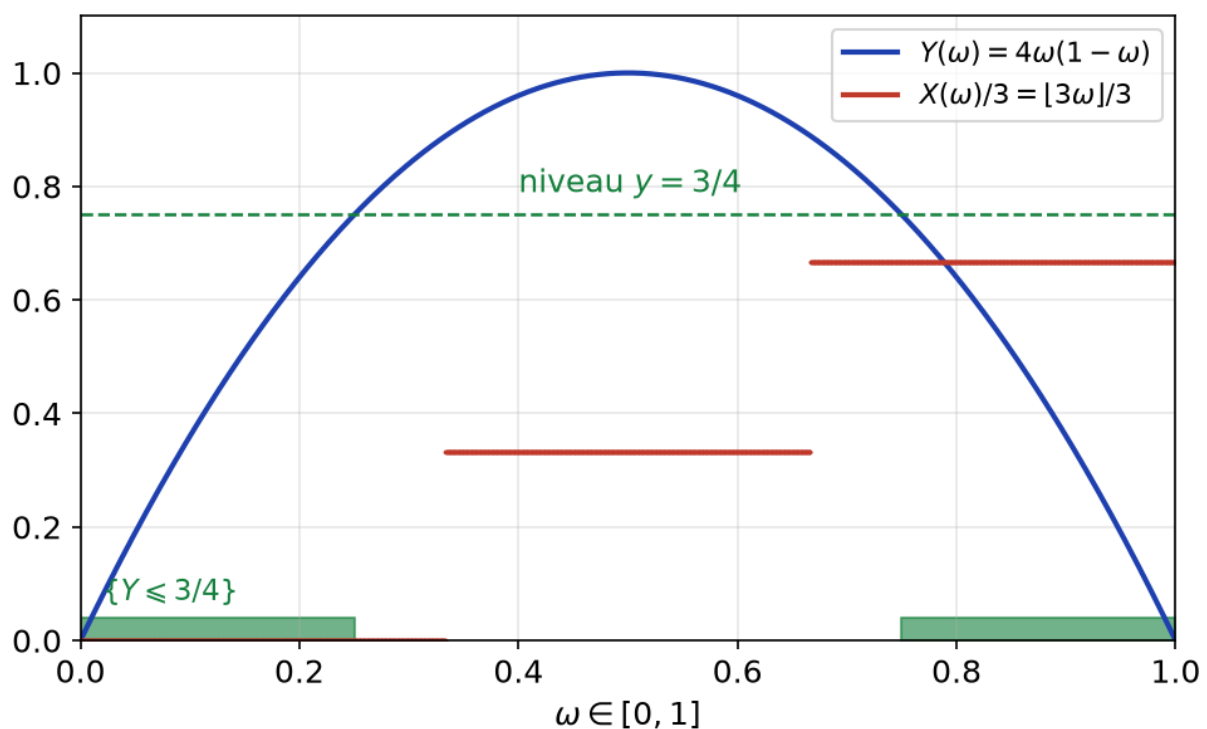


Variables aléatoires et espérance

Exercice 1 : Variables aléatoires sur l'espace de Lebesgue

On munit $\Omega = [0,1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ . Pour $\omega \in \Omega$, on pose $X(\omega) = \lfloor 3\omega \rfloor$ et $Y(\omega) = 4\omega(1 - \omega)$. La figure ci-dessous représente ces deux fonctions.



1. Justifier que $(\Omega, \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ est un espace probabilisé et que X et Y sont des variables aléatoires.
2. Déterminer la loi de X et son espérance.
3. Calculer la fonction de répartition de Y . En déduire que Y a une densité, que l'on précisera.

4. Calculer $E[Y]$ de deux manières : avec le théorème de transfert sur Ω , puis avec la densité de Y .
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : Fonction muette et loi uniforme

Soit X une variable de loi uniforme sur $]0,1[$ et $\lambda > 0$.

1. Par la méthode de la fonction muette, montrer que $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Déterminer la loi de $Z = X^2$ et calculer $E[Z]$.
3. Déterminer la loi de $W = 1/X$. La variable W est-elle intégrable ?
4. Soit F une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Montrer que $F^{-1}(X)$ a pour fonction de répartition F .

Exercice 3 : Moments des lois usuelles

1. Soit X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $E[X]$, $E[X(X-1)]$, puis $\text{Var}(X)$.
2. Soit G de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$, avec $0 < p < 1$. Calculer $E[G]$ et $\text{Var}(G)$.
3. Soit T de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $E[T^n] = n!/\lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $E[Z] = 0$ et $E[Z^2] = 1$. En déduire l'espérance et la variance de $m + \sigma Z$.

Exercice 4 : Espérance et fonction de queue

1. Soit X une variable aléatoire positive. Démontrer que $E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt$, en justifiant l'échange des intégrales.
2. Retrouver ainsi l'espérance de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Soit N à valeurs dans $\mathbb{N}$. En déduire que $E[N] = \sum_{k \geq 1} P(N \geq k)$, puis retrouver l'espérance de la loi $\mathcal{G}(p)$.
4. Soit $p > 0$. Montrer que $E[X^p] = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} P(X > t) dt$. Vérifier la formule pour $p = 2$ et X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 5 : Loi de Cauchy et absence d'espérance

Soit U de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $X = \tan U$.

1. Montrer que X a pour densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
2. Montrer que X n'est pas intégrable.
3. Montrer que $1/X$ suit la même loi que X .
4. Calculer $P(|X| > t)$ pour $t > 0$, et en donner un équivalent quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 : Calcul de fonctions caractéristiques

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, puis celle de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.
4. Montrer que la fonction caractéristique de $\mathcal{E}(\lambda)$ est $t \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
5. En dérivant cette fonction en 0, retrouver l'espérance et la variance de $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 7 : Indépendance deux à deux et mutuelle

1. Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que A et B^c sont indépendants. En déduire que les tribus $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ et $\sigma(B)$ sont indépendantes.
2. On lance deux dés équilibrés : X_1 et X_2 sont indépendantes et uniformes sur $\{1, \dots, 6\}$. On pose $A = \{X_1 \text{ pair}\}$, $B = \{X_2 \text{ pair}\}$ et $C = \{X_1 + X_2 \text{ pair}\}$. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
3. Montrer que A , B , C sont indépendants deux à deux.
4. Sont-ils mutuellement indépendants ? Que peut-on dire des variables 1_A , 1_B , 1_C ?

Exercice 8 : Indépendance et densité produit

1. Soit (X, Y) de densité $f(x, y) = 4xy$ sur $[0, 1]^2$ et nulle ailleurs. Vérifier que f est une densité, calculer les lois marginales et montrer que X et Y sont indépendantes.
2. Soit maintenant (X, Y) de densité $g(x, y) = x + y$ sur $[0, 1]^2$ et nulle ailleurs. Vérifier que g est une densité et calculer les densités marginales.
3. Sous la densité g , les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
4. Sous la densité g , calculer $P(X + Y \leq 1)$.

Exercice 9 : Minimum d'exponentielles indépendantes

Soient X et Y indépendantes, de lois $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. On pose $M = \min(X, Y)$.

1. Montrer que $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ pour tous $s, t \geq 0$.
2. Déterminer la loi de M .
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. Montrer que M et l'événement $\{X < Y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire que les tribus $\sigma(M)$ et $\sigma(1_{\{X < Y\}})$ sont indépendantes.

Exercice 10 : Produit de convolution

1. Soient X et Y indépendantes, de densités f et g . Montrer, par la méthode de la fonction muette, que $X + Y$ a pour densité $f * g$.
2. Soient X et Y indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la densité de $X + Y$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ a pour densité $s \rightarrow \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} 1_{s > 0}$.
4. En déduire $P(S_2 \leq 1)$ pour $\lambda = 1$.

Exercice 11 : Coordonnées polaires d'un couple gaussien

Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On écrit $(X, Y) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$ avec $R > 0$ et $\Theta \in]0, 2\pi[$, ce qui est possible presque sûrement.

1. Déterminer la densité du couple (R, Θ) . Montrer que R et Θ sont indépendantes et préciser leurs lois.
2. Montrer que $R^2 = X^2 + Y^2$ suit la loi $\mathcal{E}(1/2)$. Calculer $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.
3. Soient U et V indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $\sqrt{-2\ln U} \cos(2\pi V)$ et $\sqrt{-2\ln U} \sin(2\pi V)$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
4. Montrer que Y/X suit la loi de Cauchy.

Exercice 12 : Rapport et somme d'exponentielles

Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

1. Montrer que $\varphi : (x, y) \rightarrow (x + y, \frac{x}{x+y})$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur $]0, +\infty[\times]0,1[$, et expliciter sa réciproque.
2. Déterminer la densité du couple (U, V) .
3. En déduire les lois de U et de V , et montrer qu'elles sont indépendantes.
4. En déduire $E[X | U]$.

Exercice 13 : Covariance nulle sans indépendance

1. Soit X uniforme sur $[-1,1]$ et $Y = X^2$. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
2. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soient X et Y deux variables de Bernoulli. Montrer que si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, alors X et Y sont indépendantes.
4. Soient X, Y réelles telles que $\text{Cov}(h(X), k(Y)) = 0$ pour toutes fonctions h, k

mesurables bornées. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 14 : Matrice de covariance

Soient X et Y indépendantes, centrées, de variances $\text{Var}(X) = 1$ et $\text{Var}(Y) = 2$.

1. Soit Z un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable. Montrer que Γ_Z est symétrique positive et que $\Gamma_{AZ} = A \Gamma_Z A^T$ pour toute matrice A à d colonnes.
2. Calculer la matrice de covariance de $W = (X + Y, X - Y)$.
3. Déterminer le réel c tel que $X - Y - c(X + Y)$ soit non corrélée à $X + Y$.
4. Calculer la matrice de covariance de $T = (X, Y, X + Y)$. Montrer qu'elle n'est pas inversible et interpréter un vecteur de son noyau.

Exercice 15 : Lois de Laplace et de Cauchy

La loi de Laplace a pour densité $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de la loi de Laplace est $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$.
2. À l'aide de la formule d'inversion, en déduire que la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est $t \rightarrow e^{-|t|}$.
3. Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. Montrer que $X - Y$ suit la loi de Laplace.
4. La fonction caractéristique de la loi de Cauchy est-elle dérivable en 0 ? Commenter.

Exercice 16 : Moments de la loi normale par la fonction caractéristique

Soit Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction caractéristique $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

1. Montrer que Z admet des moments de tous ordres.
2. En développant φ en série entière, montrer que $E[Z^{2k+1}] = 0$ et $E[Z^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
3. Retrouver ce résultat par une intégration par parties, en établissant $E[Z^{2k+2}] = (2k+1) E[Z^{2k}]$.
4. Soit X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer $E[(X - m)^4]$ et $E[X^3]$.

Exercice 17 : Stabilité des lois normales et de Cauchy

1. Soient X et Y indépendantes, de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Déterminer la loi de $\bar{X}_n$ et la limite de $P(|\bar{X}_n| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi de Cauchy, de fonction caractéristique $e^{-|t|}$. Déterminer la loi de $\bar{X}_n$ et calculer $P(|\bar{X}_n| > 1)$.
4. Soient $a, b > 0$ et X, Y indépendantes de loi de Cauchy. Déterminer la loi de $aX + bY$ et en donner la densité.

Exercice 18 : Manipulation d'un vecteur gaussien

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que Γ est bien une matrice de covariance.
2. Déterminer les lois de $X_1 + X_2$ et de $X_1 - X_2$. Montrer que ces deux variables sont indépendantes.
3. Déterminer le réel a tel que $X_2 - aX_1$ soit indépendante de X_1 . En déduire $E[X_2 | X_1]$ et la loi de $X_2 - E[X_2 | X_1]$.
4. Écrire la densité de X .
5. Trouver une matrice triangulaire inférieure A telle que $AA^T = \Gamma$. Comment simuler X à partir de deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$?

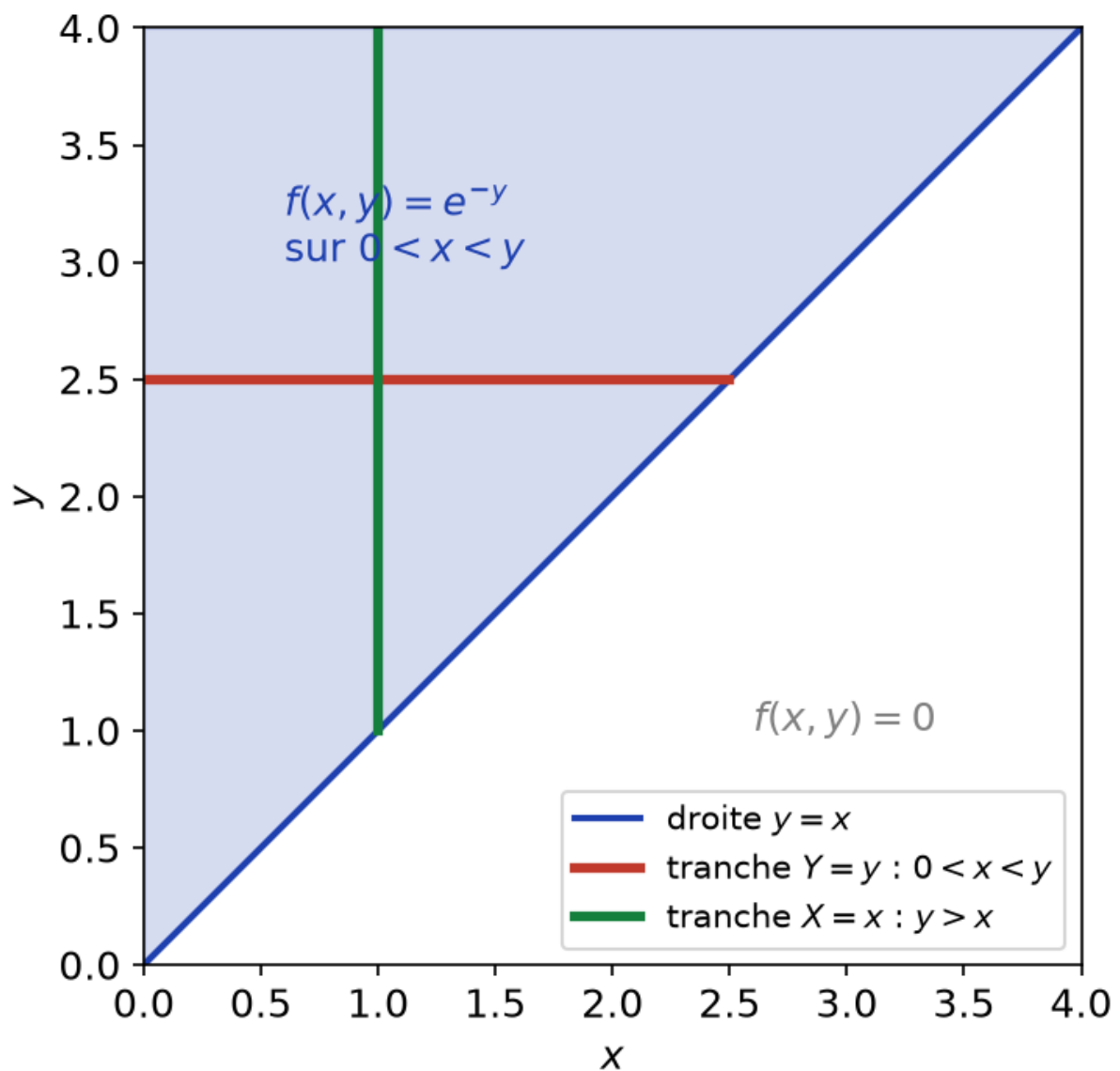
Exercice 19 : Amincissement d'une loi de Poisson

Un nombre N de clients, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, entre dans un magasin. Chacun achète avec probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres et de N . On note X le nombre d'acheteurs, de sorte que $P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. On pose $q = 1 - p$ et $Y = N - X$.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $P(X = k, Y = m)$ et montrer que X et Y sont indépendantes. Préciser la loi de Y .
3. Calculer $E[X | N]$ et vérifier la relation $E[E[X | N]] = E[X]$.
4. Calculer $E[N | X]$.

Exercice 20 : Densités conditionnelles sur un domaine

Soit (X, Y) de densité $f(x, y) = e^{-y} 1_{\{0 < x < y\}}$. Le domaine où f est non nulle est représenté ci-dessous.



1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, puis $E[X | Y]$.
4. Déterminer la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$, puis $E[Y | X]$.
5. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendantes, de même loi.

Exercice 21 : Composantes gaussiennes d'un vecteur non gaussien

Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et ε indépendante de X , avec $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Y = \varepsilon X$.

1. Montrer que Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
3. Calculer $P(X + Y = 0)$. Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ?
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{(X,Y)}(s,t)$ et vérifier qu'elle n'est pas de la forme $\varphi_X(s) \varphi_Y(t)$.
6. Calculer $E[Y | X]$ et $E[Y^2 | X]$.

Exercice 22 : Sommes aléatoires et identité de Wald

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de même loi, de carré intégrable, de moyenne m , de variance σ^2 et de fonction caractéristique φ_X . Soit N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, de carré intégrable, indépendante de la suite (X_k) . On pose $S = \sum_{k=1}^N X_k$, avec $S = 0$ si $N = 0$, et $G_N(z) = E[z^N]$ pour $|z| \leq 1$.

1. Calculer $E[S | N]$ et en déduire l'identité de Wald $E[S] = m E[N]$.
2. Montrer que $\text{Var}(S) = \sigma^2 E[N] + m^2 \text{Var}(N)$.
3. Montrer que $\varphi_S(t) = G_N(\varphi_X(t))$.
4. On suppose N de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et X_k de loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de S .

5. On suppose N de loi $\mathcal{G}(r)$ sur $\mathbb{N}^*$, avec $0 < r < 1$, et X_k de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que S suit la loi $\mathcal{E}(r\lambda)$.

Exercice 23 : Problème : lois gamma et bêta

Pour $a > 0$, la loi $\Gamma(a, 1)$ a pour densité $f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} 1_{x > 0}$. On note Log la détermination principale du logarithme sur $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$, et $(1 - it)^{-a} = \exp(-a \text{Log}(1 - it))$.

1. Soit X de loi $\Gamma(a, 1)$. Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.
2. Montrer que la fonction caractéristique φ de X est dérivable et vérifie $(1 - it) \varphi'(t) = ia \varphi(t)$. En déduire que $\varphi(t) = (1 - it)^{-a}$.
3. Soient X et Y indépendantes de lois $\Gamma(a, 1)$ et $\Gamma(b, 1)$. Déterminer la loi de $X + Y$.
4. On pose $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$. Déterminer la densité du couple (U, V) . Montrer que U et V sont indépendantes et que V a pour densité $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} v^{a-1}(1-v)^{b-1}$ sur $]0, 1[$.
5. En déduire la formule $\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1} dv = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, puis la valeur de $\Gamma(1/2)$.
6. Calculer $E[V]$ en utilisant l'indépendance de U et V , puis $E[X | U]$.

Exercice 24 : Problème : moyenne et variance empiriques gaussiennes

Soient $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$. On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

On admet que la loi $\Gamma(a, \lambda)$ a pour fonction caractéristique $t \rightarrow (1 - it/\lambda)^{-a}$.

1. Montrer que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien et donner sa moyenne et sa covariance.
2. Déterminer la loi de $\bar{X}$.
3. Calculer $\text{Cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X})$. En déduire que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes.
4. Montrer que $E[S^2] = \sigma^2$.
5. Soit Q une matrice orthogonale dont la première ligne est $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. On pose $Y_i = (X_i - m)/\sigma$ et $W = QY$. Montrer que les W_i sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n W_i^2$.
6. Montrer que W_i^2 suit la loi $\Gamma(1/2, 1/2)$. En déduire que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ suit la loi $\Gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$, appelée loi du khi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [variables aléatoires et espérance, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#), [Mesure produit](#), [Fubini et](#)

[changement de variables](#)

- Chapitre précédent : [Espaces de Hilbert et analyse de Fourier](#)
- Chapitre suivant : [Convergences, grands nombres et central limite](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)