

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 : Une loi sur $\mathbb{N}^*$ définie par une constante

Soit c un réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \geq 1$,
$$P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}.$$

1. Déterminer c .
2. Calculer $P(X \geq n)$ pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer $P(X \text{ est pair})$. On admettra que $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln 2$.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X \geq n)$.

Exercice 2 : Maximum et minimum de trois dés

On lance trois dés équilibrés à six faces, de façon indépendante. On note X_1, X_2, X_3 les résultats, M le plus grand et m le plus petit.

1. Rappeler la loi de chaque X_i . Calculer $P(M \leq k)$ pour $k \in \{1, \dots, 6\}$.
2. En déduire la loi de M .
3. Calculer $P(m \geq k)$, puis la loi de m .
4. Plus généralement, donner la loi du maximum de n variables indépendantes de loi uniforme sur

$$\{1, \dots, N\}.$$

Exercice 3 : Loi conjointe donnée par un tableau

Le couple (X, Y) a la loi conjointe suivante.

$$\begin{array}{c|ccc}
 Y \backslash X & -1 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 1/10 & 1/5 & 1/10 \\
 2 & 1/5 & 1/10 & 3/10
 \end{array}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X + Y$ et celle de XY .
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 2)$.

Exercice 4 : Une loi conjointe produit

Soit (X, Y) un couple à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$P(X = i, Y = j) = c \frac{2^i 3^j}{i! j!}.$$

1. Déterminer c .
2. Déterminer les lois de X et de Y . Les reconnaître.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer directement la loi de $X + Y$, puis $P(X = 0 | X + Y = 2)$.

Exercice 5 : Premier six au lancer d'un dé

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six. On note T le nombre de lancers effectués.

1. Justifier que T suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Calculer $P(T \leq 3)$ et $P(T > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(T \leq n) \geq \frac{1}{2}$.
4. Calculer la probabilité que T soit pair.

Exercice 6 : Modes d'une loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On note $p_k = P(X = k)$.

1. Calculer $\frac{p_k}{p_{k-1}}$ pour $k \geq 1$.
2. En déduire les valeurs de k pour lesquelles p_k est maximal, en distinguant le cas où λ est entier.
3. Application : pour $\lambda = 3,5$, donner le mode et une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité correspondante. Même question pour $\lambda = 4$.

Exercice 7 : Parité d'une variable de Poisson

Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $P(X \text{ est pair})$. Déterminer la loi de $Y = (-1)^X$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que X est pair.
3. Déterminer la loi de $W = \min(X, 2)$.
4. Application numérique pour $\lambda = 1$: donner $P(X \text{ pair})$ à 10^{-3} près.

Exercice 8 : Absence de mémoire de la loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Montrer que $P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de $X - n$ sachant $(X > n)$.
3. Réciproquement, soit Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(Z > n) > 0$ pour tout n et $P(Z > n + k \mid Z > n) = P(Z > k)$ pour tous n, k . Montrer que Z suit une loi géométrique.
4. La durée de vie en jours d'un composant suit la loi $\mathcal{G}(0,02)$. Sachant qu'il fonctionne encore après 30 jours, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore après 40 jours ?

Exercice 9 : Partie entière supérieure d'une variable géométrique

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On pose $Y = \left\lceil \frac{X}{2} \right\rceil$, c'est-à-dire $Y = k$ si $X \in \{2k - 1, 2k\}$, et $R = 2Y - X$.

1. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
2. Montrer que R suit une loi de Bernoulli dont on donnera le paramètre.

3. Montrer que Y et R sont indépendantes.

Exercice 10 : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$, (p_n) une suite de $]0, 1[$ telle que $np_n \rightarrow \lambda$, et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
2. Une machine produit 400 pièces ; chacune est défectueuse avec probabilité 0,005, indépendamment des autres. On note D le nombre de pièces défectueuses. Donner la loi exacte de D et la loi de Poisson qui l'approche.
3. Calculer $P(D = 0)$ et $P(D \leq 2)$ avec les deux lois, à 10^{-4} près.

Exercice 11 : Somme de deux variables de Poisson indépendantes

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes, et $S = X + Y$.

1. Démontrer que $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$.
3. Un standard reçoit en une heure un nombre d'appels $X \sim \mathcal{P}(3)$ sur une ligne et $Y \sim \mathcal{P}(2)$ sur une autre, indépendants. Calculer la probabilité de recevoir 4 appels au total, puis la probabilité que 3 d'entre eux arrivent sur la première ligne sachant qu'il y en a 4 au total.

Exercice 12 : Sommes binomiales et loi hypergéométrique

Soit $p \in]0, 1[$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes.

1. À l'aide de la formule de Vandermonde, montrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
2. Retrouver ce résultat en écrivant X et Y comme sommes de variables de Bernoulli et en utilisant le lemme des coalitions.
3. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n + m\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = k)$.
Dépend-elle de p ?

Exercice 13 : Minimum et maximum de deux lois géométriques

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(r)$ indépendantes, avec $p, r \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et $s = 1 - r$.

1. Calculer $P(\min(X, Y) > n)$. En déduire la loi de $\min(X, Y)$.
2. Calculer $P(\max(X, Y) \leq n)$, puis $P(\max(X, Y) = n)$.
3. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X < Y)$.
4. Application : $p = r = \frac{1}{2}$. Donner $P(X = Y)$, $P(X < Y)$ et $P(X > Y)$.

Exercice 14 : Somme de deux lois géométriques de paramètres distincts

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(r)$ indépendantes, avec $p \neq r$ dans $]0, 1[$.

1. Montrer que, pour $n \geq 2$,

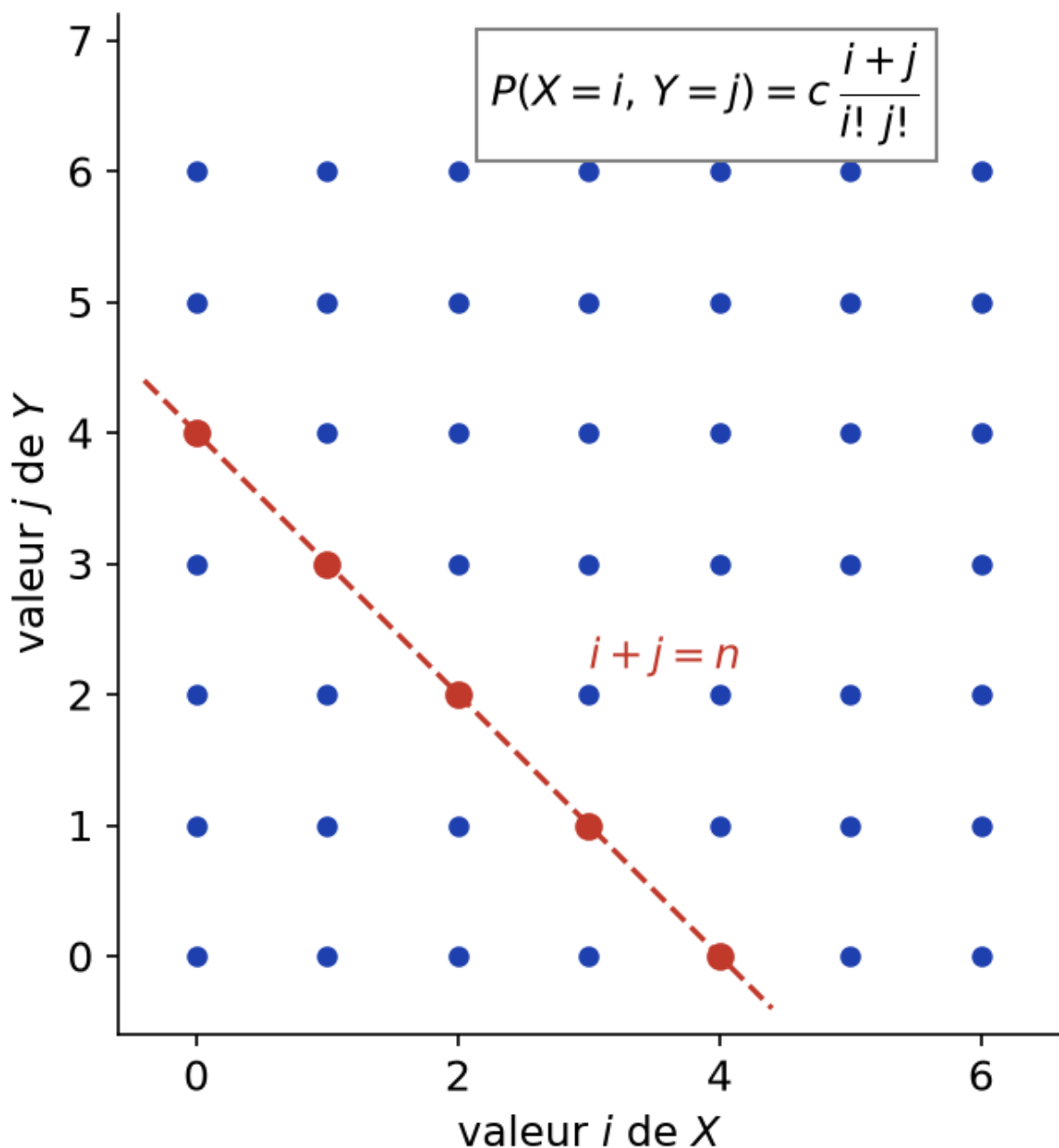
$$P(X + Y = n) = \frac{pr}{p - r} \left((1 - r)^{n-1} - (1 - p)^{n-1} \right).$$

2. Vérifier par un calcul direct que ces nombres ont une somme égale à 1.

3. Retrouver, en faisant tendre r vers p , la loi de la somme de deux variables indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$, puis la vérifier directement.

Exercice 15 : Loi conjointe sur $\mathbb{N}^2$ et somme décalée

Soit (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, avec $P(X = i, Y = j) = c \frac{i+j}{i! j!}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. La figure représente les points de $\mathbb{N}^2$ et une diagonale $i + j = n$.



1. Déterminer c .
2. Déterminer la loi de X et celle de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $S = X + Y$. Montrer que $S - 1$ suit une loi de Poisson.

Exercice 16 : Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Soit X et Y indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Déterminer la loi de Z .
2. Montrer que X et Z sont indépendantes, ainsi que Y et Z .
3. Montrer que X , Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes.
4. Soit U et V deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que U^2 et e^V sont indépendantes.

Exercice 17 : Lemme des coalitions et parité d'une somme

Soit $p \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, avec $n \geq 4$. On pose $S_k = X_1 + \dots + X_k$.

1. Montrer que $X_1 X_2$ et $X_3 + X_4$ sont indépendantes et donner leurs lois.
2. Les variables $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$ sont-elles indépendantes ?
3. On note $e_k = P(S_k \text{ pair})$, avec $e_0 = 1$. Montrer que $e_k = p + (1 - 2p)e_{k-1}$ pour $k \geq 1$.

4. En déduire e_n , puis sa limite quand $n \rightarrow +\infty$ (pour une suite i.i.d. infinie).

Exercice 18 : Rangs des deux premiers succès

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On note T_1 le rang du premier succès et T_2 celui du deuxième.

1. Justifier l'existence d'une telle suite. Montrer que T_1 et T_2 sont finies presque sûrement.
2. Déterminer la loi conjointe de (T_1, T_2) .
3. En déduire la loi de T_2 .
4. Montrer que T_1 et $D = T_2 - T_1$ sont indépendantes et de même loi.

Exercice 19 : Tri d'une loi de Poisson

Un insecte pond un nombre N d'œufs, avec $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf éclot avec probabilité $p \in]0, 1[$. On note X le nombre d'œufs éclos, et l'on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Déterminer la loi conjointe de $(X, N - X)$.
2. En déduire les lois de X et de $N - X$.
3. Montrer que X et $N - X$ sont indépendantes. Comparer avec X et N .
4. Pour $\lambda = 10$ et $p = 0,6$, calculer la probabilité qu'aucun œuf n'éclore.

Exercice 20 : Problème, caractérisation des lois géométriques

Soit X et Y deux variables indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec $u_k = P(X = k) > 0$ pour tout $k \geq 1$. On pose $S = X + Y$.

Partie A. On suppose ici $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de S .
2. Pour $n \geq 2$, montrer que la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ est uniforme sur $\{1, 1., n - 1\}$.

Partie B. On suppose réciproquement que, pour tout $n \geq 2$, la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ est uniforme sur $\{1, 1., n - 1\}$.

1. Justifier que $P(S = n) > 0$ pour $n \geq 2$, puis que $u_k u_{n-k} = \frac{P(S = n)}{n-1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$.
2. En déduire que $u_{k+1} = \frac{u_2}{u_1} u_k$ pour tout $k \geq 1$.
3. Conclure que X suit une loi géométrique.
4. Montrer qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse $u_k > 0$: exhiber une loi sur $\mathbb{N}^*$, non géométrique, telle que pour tout n vérifiant $P(S = n) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ soit uniforme sur $\{1, 1., n - 1\}$.

Exercice 21 : Problème, caractérisation des lois de Poisson

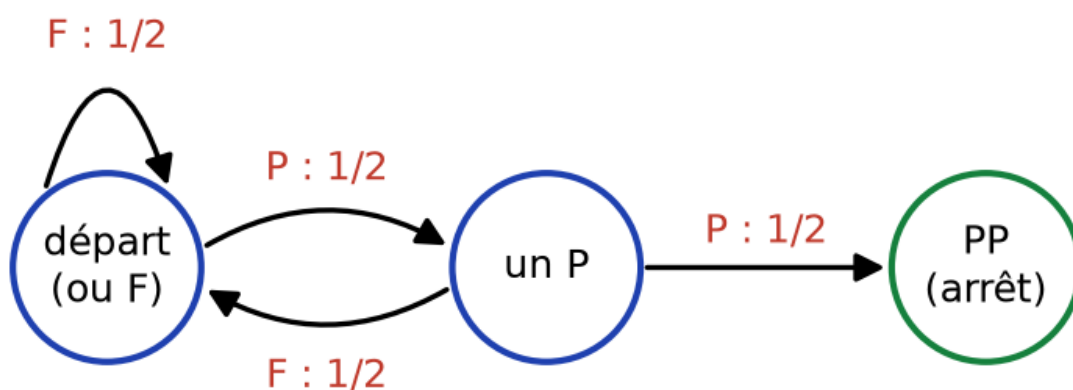
Soit X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $u_k = P(X = k) > 0$ et $v_k = P(Y = k) > 0$ pour tout k . On pose $S = X + Y$ et $s_n = P(S = n)$. On suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$

soit $\mathcal{B}(n, p)$. On note $q = 1 - p$.

1. Justifier que $s_n > 0$, puis que $u_k v_{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s_n$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. En utilisant $n = k + 1$, montrer que $u_{k+1} = \frac{\alpha}{k+1} u_k$, où $\alpha = \frac{p v_1}{q v_0}$.
3. En déduire que $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$.
4. Montrer de même que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\beta = \frac{q u_1}{p u_0}$, puis exprimer β en fonction de α et p .
5. Vérifier la cohérence avec l'exercice 11.

Exercice 22 : Temps d'attente de deux piles consécutifs

On lance indéfiniment une pièce équilibrée ; les lancers sont indépendants. On note T le rang du lancer où l'on obtient pour la première fois deux piles consécutifs, avec $T = +\infty$ si cela n'arrive jamais. La figure décrit l'évolution de l'expérience selon le dernier résultat.



1. En découpant les lancers en blocs $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, etc., montrer que $P(T > 2k) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$. En

déduire $P(T = +\infty) = 0$.

2. On note a_m le nombre de mots de longueur m sur l'alphabet $\{P, F\}$ sans deux P consécutifs, avec $a_0 = 1$. Calculer a_1 , a_2 et montrer que $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$ pour $m \geq 2$.
3. Montrer que $P(T = 2) = \frac{1}{4}$ et que $P(T = n) = \frac{a_{n-3}}{2^n}$ pour $n \geq 3$.
4. On note $p_n = P(T = n)$. Montrer que $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n-2}$ pour $n \geq 4$, et vérifier que $\sum_{n \geq 2} p_n = 1$ à l'aide de cette relation.
5. Calculer $P(T \leq 5)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [variables aléatoires discrètes, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)
- Chapitre précédent : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)
- Chapitre suivant : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#)
- Le même thème en L2 : [variables aléatoires discrètes, exercices de maths en L2](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)