

Variables aléatoires discrètes

Corrigé de l'exercice 1 : Une loi sur $\mathbb{N}^*$ définie par une constante

1. Les nombres $\frac{c}{k(k+1)}$ doivent être positifs et de somme 1. D'abord, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Par télescopage, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 1. La condition $c \cdot 1 = 1$ donne donc $c = 1$.

2. Pour $N \geq n$, $\sum_{k=n}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $P(X \geq n) = \frac{1}{n}$.

3. L'événement $(X \text{ pair})$ est la réunion disjointe des $(X = 2j)$, pour $j \geq 1$. Ainsi,

$$P(X \text{ pair}) = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2j+1} \right).$$

Notons $A_N = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m+1}}{m}$. La somme partielle d'indice J vaut

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2J} - \frac{1}{2J+1} = 1 - A_{2J+1}. \text{ Or } A_{2J+1} \rightarrow \ln 2. \text{ Par conséquent, } P(X \text{ pair}) = 1 - \ln 2 \approx 0,307.$$

4. L'événement $(X \geq n)$ a une probabilité $\frac{1}{n} > 0$. Pour $k \geq n$, on a $(X = k) \subset (X \geq n)$, donc

$$P(X = k \mid X \geq n) = \frac{P(X = k)}{P(X \geq n)} = \frac{n}{k(k+1)}.$$

Pour $k < n$, cette probabilité est nulle. **La loi conditionnelle est donnée par $\frac{n}{k(k+1)}$ pour**

$$k \geq n.$$

Corrigé de l'exercice 2 : Maximum et minimum de trois dés

- Chaque X_i suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$. Ensuite,
 $(M \leq k) = (X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k) \cap (X_3 \leq k)$. Par indépendance,

$$P(M \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 = \frac{k^3}{216}.$$
- Pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1)$. Donc

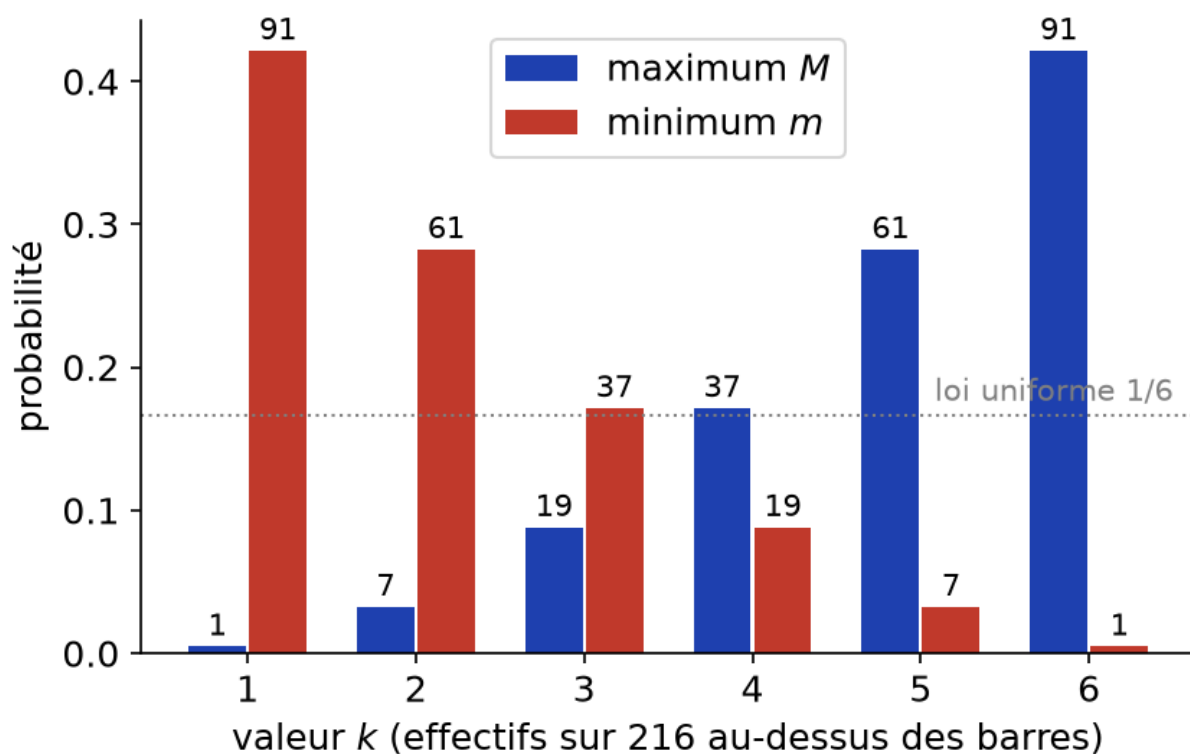
$$P(M = k) = \frac{k^3 - (k-1)^3}{216}, \text{ soit } \frac{1}{216}, \frac{7}{216}, \frac{19}{216}, \frac{37}{216}, \frac{61}{216}, \frac{91}{216}.$$
- De même, $(m \geq k) = \bigcap_i (X_i \geq k)$ et $P(X_i \geq k) = \frac{7-k}{6}$. Ainsi,

$$P(m \geq k) = \frac{(7-k)^3}{216}.$$
 Ensuite, $P(m = k) = P(m \geq k) - P(m \geq k+1)$. On obtient

$$P(m = k) = \frac{(7-k)^3 - (6-k)^3}{216}.$$
 C'est la loi de M retournée, puisque $7 - m$ a la même loi que M .
- Le même raisonnement donne $P(M \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$. Par conséquent,

$$P(M = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \text{ pour } 1 \leq k \leq N.$$

La figure ci-dessous compare les deux lois obtenues à la loi uniforme d'un seul dé. Le maximum favorise les grandes valeurs, le minimum les petites.



Point de méthode : pour un maximum, calculez $P(M \leq k)$; pour un minimum, calculez $P(m \geq k)$. Ces événements sont des intersections, que l'indépendance transforme en produits.

Corrigé de l'exercice 3 : Loi conjointe donnée par un tableau

1. On somme chaque colonne : $P(X = -1) = \frac{3}{10}$, $P(X = 0) = \frac{3}{10}$, $P(X = 1) = \frac{4}{10}$.
On somme chaque ligne : $P(Y = 0) = \frac{4}{10}$ **et** $P(Y = 2) = \frac{6}{10}$. Les deux lois ont bien une somme égale à 1 .

2. On a $P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{10}$, alors que $P(X = -1)P(Y = 0) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$.
Les variables ne sont donc pas indépendantes.

3. On regroupe les cases selon la valeur de la somme :

- $X + Y = -1$: case $(-1, 0)$, probabilité $\frac{1}{10}$;
- $X + Y = 0$: case $(0, 0)$, probabilité $\frac{2}{10}$;

- $X + Y = 1$: cases $(1, 0)$ et $(-1, 2)$, probabilité $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$;
- $X + Y = 2$: case $(0, 2)$, probabilité $\frac{1}{10}$;
- $X + Y = 3$: case $(1, 2)$, probabilité $\frac{3}{10}$.

Pour le produit, $XY = 0$ dès que $Y = 0$ ou $X = 0$. Ainsi,

$$P(XY = 0) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(XY = -2) = \frac{2}{10} \text{ et } P(XY = 2) = \frac{3}{10}.$$

4. Comme $P(Y = 2) = \frac{6}{10}$, on divise la ligne $Y = 2$ par ce nombre. **On obtient**

$$P(X = -1 | Y = 2) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 0 | Y = 2) = \frac{1}{6} \text{ et } P(X = 1 | Y = 2) = \frac{1}{2}.$$

Cette loi diffère de celle de X , ce qui confirme la question 2.

Corrigé de l'exercice 4 : Une loi conjointe produit

1. La famille est à termes positifs. Par sommation par paquets,

$$\sum_{i, j} \frac{2^i 3^j}{i! j!} = \sum_{i \geq 0} \frac{2^i}{i!} \sum_{j \geq 0} \frac{3^j}{j!} = e^2 e^3 = e^5.$$

Donc $c = e^{-5}$.

2. Pour $i \in \mathbb{N}$, $P(X = i) = \sum_j e^{-5} \frac{2^i 3^j}{i! j!} = e^{-5} \frac{2^i}{i!} e^3 = e^{-2} \frac{2^i}{i!}$. De même,

$$P(Y = j) = e^{-3} \frac{3^j}{j!}. \text{ Ainsi, } X \sim \mathcal{P}(2) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(3).$$

3. Pour tous i, j , $P(X = i)P(Y = j) = e^{-5} \frac{2^i 3^j}{i! j!} = P(X = i, Y = j)$. **Les variables X et Y sont donc indépendantes.**

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme,

$$P(X + Y = n) = e^{-5} \sum_{i=0}^n \frac{2^i 3^{n-i}}{i! (n-i)!} = \frac{e^{-5}}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i 3^{n-i} = e^{-5} \frac{5^n}{n!}.$$

Donc $X + Y \sim \mathcal{P}(5)$. Ensuite, $P(X = 0, Y = 2) = e^{-5} \frac{5^2}{2!}$ et
 $P(X + Y = 2) = e^{-5} \frac{5^2}{2!}$. Par conséquent, $P(X = 0 | X + Y = 2) = \frac{9}{25}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Premier six au lancer d'un dé

1. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli, de succès « obtenir six », de probabilité $\frac{1}{6}$. Les lancers sont indépendants et T est le rang du premier succès. D'après le cours, $T \sim \mathcal{G}(1/6)$.

2. D'abord, $P(T > n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, car les n premiers lancers sont des échecs. Ensuite,
 $P(T \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0,421$.

3. On cherche $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{2}$, soit $n \ln \frac{5}{6} \geq \ln 2$, donc $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,2} \approx 3,80$. Vérifions :
 $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,579$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0,482$. **Le plus petit entier est $n = 4$.**

4. Avec $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$,

$$P(T \text{ pair}) = \sum_{j \geq 1} p q^{2j-1} = \frac{pq}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}.$$

On obtient $P(T \text{ pair}) = \frac{5/6}{11/6} = \frac{5}{11}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Modes d'une loi de Poisson

1. Pour $k \geq 1$, $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k / k!}{e^{-\lambda} \lambda^{k-1} / (k-1)!}$, donc $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k}$.

2. Ainsi, $p_k > p_{k-1}$ si et seulement si $k < \lambda$, et $p_k = p_{k-1}$ si et seulement si $k = \lambda$. La suite (p_k) croît donc strictement jusqu'au plus grand entier strictement inférieur à λ , puis

décroît. Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, le maximum est atteint uniquement en $k = \lfloor \lambda \rfloor$. Si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{\lambda-1} = p_{\lambda}$, et le maximum est atteint en $\lambda - 1$ et en λ .

3. Pour $\lambda = 3,5$, le mode est 3 et $p_3 = e^{-3,5} \frac{3,5^3}{6} \approx 0,216$. Pour $\lambda = 4$, les modes sont 3 et 4, avec $p_3 = p_4 = e^{-4} \frac{4^4}{6} \approx 0,195$.

Corrigé de l'exercice 7 : Parité d'une variable de Poisson

1. L'événement $(X \text{ pair})$ est la réunion disjointe des $(X = 2k)$. Donc

$$P(X \text{ pair}) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh \lambda = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

La variable $Y = (-1)^X$ prend les valeurs 1 et -1. Ainsi, $P(Y = 1) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$ et $P(Y = -1) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}$.

2. L'événement $(X \text{ pair})$ est de probabilité non nulle. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X = 2k) \subset (X \text{ pair})$, donc

$$P(X = 2k | X \text{ pair}) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{2k} / (2k)!}{e^{-\lambda} \cosh \lambda} = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)! \cosh \lambda}.$$

Les valeurs impaires ont une probabilité conditionnelle nulle.

3. La variable W prend les valeurs 0, 1 et 2. D'abord, $P(W = 0) = e^{-\lambda}$ et $P(W = 1) = \lambda e^{-\lambda}$. Ensuite, $(W = 2) = (X \geq 2)$. Donc $P(W = 2) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)$.

4. Pour $\lambda = 1$, $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + e^{-2}}{2} \approx 0,568$.

Corrigé de l'exercice 8 : Absence de mémoire de la loi

géométrie

1. D'après le cours, $P(X > m) = q^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme $(X > n + k) \subset (X > n)$,

$$P(X > n + k \mid X > n) = \frac{P(X > n + k)}{P(X > n)} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k.$$

C'est bien $P(X > k)$.

2. Sachant $(X > n)$, la variable $X - n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \geq 1$,

$$P(X - n = k \mid X > n) = \frac{P(X = n + k)}{q^n} = \frac{p q^{n+k-1}}{q^n} = p q^{k-1}.$$

La loi conditionnelle de $X - n$ sachant $(X > n)$ est donc $\mathcal{G}(p)$.

3. Posons $u_n = P(Z > n)$. On a $u_0 = 1$, car $Z \geq 1$. L'hypothèse s'écrit $u_{n+k} = u_n u_k$. Avec $k = 1$, la suite (u_n) est géométrique de raison u_1 , donc $u_n = u_1^n$. D'une part, $u_1 > 0$ par hypothèse. D'autre part, les événements $(Z > n)$ décroissent et leur intersection est vide, car Z est à valeurs finies. Par continuité décroissante, $u_n \rightarrow 0$, donc $u_1 < 1$. Posons $q = u_1$. Alors $P(Z = n) = u_{n-1} - u_n = q^{n-1}(1 - q)$. Ainsi, $Z \sim \mathcal{G}(1 - q)$.
4. Soit L la durée de vie. Par la question 1, $P(L > 40 \mid L > 30) = P(L > 10) = 0,98^{10}$. Cette probabilité vaut environ 0,817. L'âge du composant n'intervient pas.

Corrigé de l'exercice 9 : Partie entière supérieure d'une variable géométrique

1. La variable Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \geq 1$, $(Y = k) = (X = 2k - 1) \cup (X = 2k)$, réunion disjointe. Donc

$$P(Y = k) = p q^{2k-2} + p q^{2k-1} = p(1 + q)(q^2)^{k-1} = (1 - q^2)(q^2)^{k-1},$$

car $p(1 + q) = (1 - q)(1 + q)$. Ainsi, $Y \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$.

2. Si $X = 2k - 1$, alors $R = 1$; si $X = 2k$, alors $R = 0$. Donc R vaut 1 exactement quand X est impair, et

$$P(R = 1) = \sum_{k \geq 1} p q^{2k-2} = \frac{p}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}.$$

La variable R suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{1+q}\right)$.

3. Pour $k \geq 1$, $P(Y = k, R = 1) = P(X = 2k - 1) = p q^{2k-2}$. Or
 $P(Y = k)P(R = 1) = (1 - q^2)q^{2k-2} \cdot \frac{1}{1+q} = p q^{2k-2}$. De même,
 $P(Y = k, R = 0) = p q^{2k-1}$ et
 $P(Y = k)P(R = 0) = (1 - q^2)q^{2k-2} \cdot \frac{q}{1+q} = p q^{2k-1}$. **La loi conjointe se factorise : Y et R sont indépendantes.**

Corrigé de l'exercice 10 : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

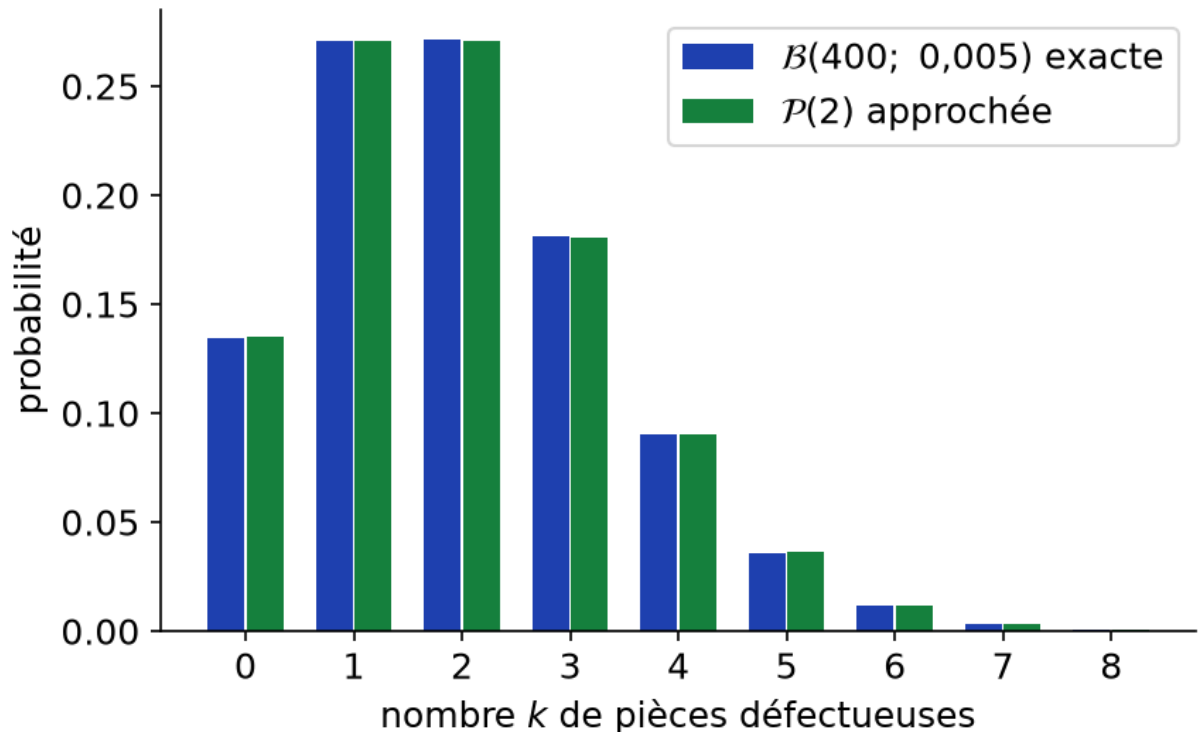
1. Fixons k et prenons $n \geq k$. On écrit

$$P(X_n = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{(n p_n)^k}{k!} \cdot (1 - p_n)^{n-k}.$$

Le premier facteur est un produit de k termes $\frac{n-i}{n}$ qui tendent vers 1. Le deuxième tend vers $\frac{\lambda^k}{k!}$. Pour le troisième, $p_n \sim \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$, donc $\ln(1 - p_n) \sim -p_n$. Ainsi,
 $(n - k)\ln(1 - p_n) \sim -n p_n \rightarrow -\lambda$. Par continuité de l'exponentielle,
 $(1 - p_n)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}$. **Finalement, $P(X_n = k) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.**

2. La variable D compte les succès dans 400 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,005. **Donc $D \sim \mathcal{B}(400; 0,005)$, approchée par $\mathcal{P}(2)$** , car $400 \times 0,005 = 2$.
3. Avec la loi exacte, $P(D = 0) = 0,995^{400} \approx 0,1347$. Ensuite,
 $P(D = 1) = 400 \times 0,005 \times 0,995^{399} \approx 0,2707$ et
 $P(D = 2) = \binom{400}{2} 0,005^2 \times 0,995^{398} \approx 0,2713$. Ainsi,
 $P(D \leq 2) \approx 0,6767$. Avec la loi de Poisson, $P(D = 0) \approx e^{-2} \approx 0,1353$ et
 $P(D \leq 2) \approx 5e^{-2} \approx 0,6767$. **Les deux calculs coïncident à 10^{-3} près.**

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux diagrammes sont presque indiscernables.



Corrigé de l'exercice 11 : Somme de deux variables de Poisson indépendantes

1. La variable S est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(S = n)$ est la réunion disjointe des $(X = k, Y = n - k)$, pour $0 \leq k \leq n$. Par indépendance et par la formule du binôme,

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}.$$

Donc $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

2. Soit $0 \leq k \leq n$. Comme $P(S = n) > 0$,

$$P(X = k | S = n) = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(S = n)} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.$$

La loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$ est $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

3. Ici $S \sim \mathcal{P}(5)$, donc $P(S = 4) = e^{-5} \frac{5^4}{24} \approx 0,175$. Ensuite, la loi de X sachant $(S = 4)$ est $\mathcal{B}(4; 3/5)$. Ainsi, $P(X = 3 | S = 4) = 4 \binom{3}{5} \frac{3^2}{5} = \frac{216}{625} \approx 0,346$.

Corrigé de l'exercice 12 : Sommes binomiales et loi hypergéométrique

1. La somme $X + Y$ prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n + m\}$. Pour k dans cet ensemble, avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ hors de $0 \leq b \leq a$,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} = p^k q^{n+m-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

La formule de Vandermonde donne $\sum_i \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$. Donc $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

2. Soit $B_1, \dots, B_{n+m}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Posons $X' = B_1 + \dots + B_n$ et $Y' = B_{n+1} + \dots + B_{n+m}$. D'après le cours, $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y' \sim \mathcal{B}(m, p)$. Par le lemme des coalitions, X' et Y' sont indépendantes. Le couple (X', Y') a donc la même loi conjointe que (X, Y) , et $X + Y$ a la loi de $X' + Y' = \sum B_i$. On retrouve $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

3. Pour $\max(0, k - m) \leq i \leq \min(n, k)$,

$$P(X = i | X + Y = k) = \frac{\binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i}}{\binom{n+m}{k} p^k q^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}.$$

C'est la loi hypergéométrique, qui ne dépend pas de p : c'est la loi du nombre de boules blanches quand on tire k boules sans remise dans une urne de n blanches et m noires.

Corrigé de l'exercice 13 : Minimum et maximum de deux lois géométriques

1. On a $(\min(X, Y) > n) = (X > n) \cap (Y > n)$. Par indépendance,
 $P(\min(X, Y) > n) = q^n s^n = (qs)^n$. Avec $0 < qs < 1$, on obtient
 $P(\min(X, Y) = n) = (qs)^{n-1} - (qs)^n = (1 - qs)(qs)^{n-1}$. Ainsi,
 $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(1 - qs)$.

2. De même, $P(\max(X, Y) \leq n) = (1 - q^n)(1 - s^n)$. Pour $n \geq 1$,
 $P(\max(X, Y) = n) = (1 - q^n)(1 - s^n) - (1 - q^{n-1})(1 - s^{n-1})$.

3. L'événement $(X = Y)$ est la réunion disjointe des $(X = k, Y = k)$. Donc

$$P(X = Y) = \sum_{k \geq 1} p q^{k-1} r s^{k-1} = \frac{pr}{1 - qs}.$$

Ensuite, $P(X < Y) = \sum_{k \geq 1} P(X = k)P(Y > k) = \sum_{k \geq 1} p q^{k-1} s^k$. Ainsi,
 $P(X = Y) = \frac{pr}{1 - qs}$ et $P(X < Y) = \frac{ps}{1 - qs}$.

4. Pour $p = r = \frac{1}{2}$, $1 - qs = \frac{3}{4}$. Donc $P(X = Y) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$ et $P(X < Y) = \frac{1}{3}$.
Par symétrie, ou par complémentaire, $P(X = Y) = P(X < Y) = P(X > Y) = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Somme de deux lois géométriques de paramètres distincts

1. Notons $q = 1 - p$ et $s = 1 - r$, avec $q \neq s$. La somme prend ses valeurs dans $\{2, 3, \dots\}$. Pour $n \geq 2$, par indépendance,

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} r s^{n-k-1} = pr \sum_{j=0}^{n-2} q^j s^{n-2-j}.$$

Or $\sum_{j=0}^{n-2} q^j s^{n-2-j} = \frac{s^{n-1} - q^{n-1}}{s-q}$, et $s-q = p-r$. **On obtient bien**

$$P(X+Y=n) = \frac{pr}{p-r}(s^{n-1} - q^{n-1}).$$

2. Par sommes géométriques,

$$\sum_{n \geq 2} (s^{n-1} - q^{n-1}) = \frac{s}{1-s} - \frac{q}{1-q} = \frac{s}{r} - \frac{q}{p} = \frac{ps - qr}{pr}.$$

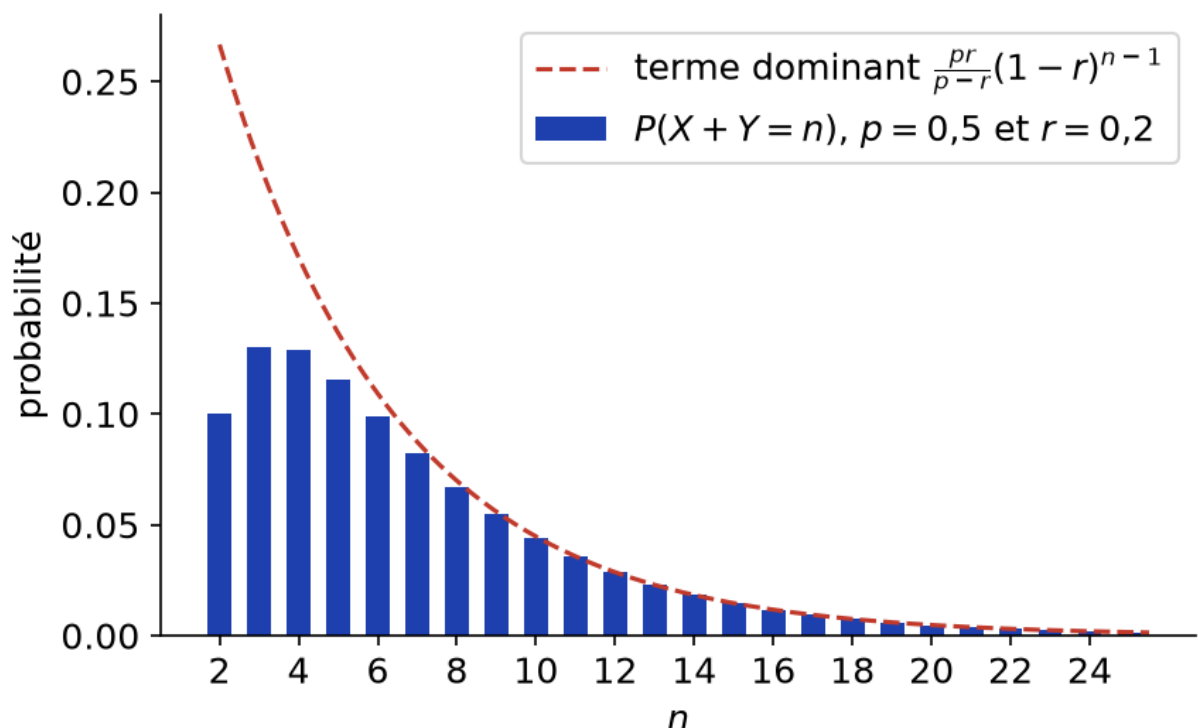
De plus, $ps - qr = p - pr - r + pr = p - r$. **La somme vaut donc**

$$\frac{pr}{p-r} \cdot \frac{p-r}{pr} = 1.$$

3. Posons $f(x) = (1-x)^{n-1}$. Alors $\frac{s^{n-1} - q^{n-1}}{p-r} = -\frac{f(r) - f(p)}{r-p}$, qui tend vers $-f'(p) = (n-1)(1-p)^{n-2}$ quand $r \rightarrow p$. La limite de la formule est donc $(n-1)p^2 q^{n-2}$. Vérifions directement : si $r = p$, chaque terme de la somme de la question 1 vaut $p^2 q^{n-2}$, et il y a $n-1$ termes. **Ainsi, pour X, Y indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$,**

$$P(X+Y=n) = (n-1)p^2 q^{n-2}.$$

La figure ci-dessous représente cette loi pour $p = 0,5$ et $r = 0,2$. Pour n grand, le terme en $(1-r)^{n-1}$ domine, car $1-r > 1-p$.



Corrigé de l'exercice 15 : Loi conjointe sur $\mathbb{N}^2$ et somme décalée

1. La famille est positive. Par sommation par paquets,

$$\sum_{i,j} \frac{i+j}{i!j!} = \sum_{i,j} \frac{i}{i!j!} + \sum_{i,j} \frac{j}{i!j!} = 2 \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{(i-1)!} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \right) = 2e^2.$$

Donc $c = \frac{1}{2e^2}.$

2. Pour $i \in \mathbb{N}$, $\sum_j \frac{i+j}{j!} = ie + e$, car $\sum_j \frac{j}{j!} = e$. Donc

$$P(X = i) = \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{(i+1)e}{i!} = \frac{i+1}{2e i!}.$$

On vérifie que $\sum_i \frac{i+1}{i!} = 2e$. Par symétrie des rôles, Y a la même loi :

$$P(Y = j) = \frac{j+1}{2e j!}.$$

3. On a $P(X = 0, Y = 0) = 0$, alors que $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4e^2} \neq 0$. **Les variables ne sont pas indépendantes.**

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on somme sur la diagonale $i + j = n$:

$$P(S = n) = \frac{n}{2e^2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i! (n-i)!} = \frac{n}{2e^2} \cdot \frac{2^n}{n!}.$$

Ainsi $P(S = 0) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $P(S = n) = e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$. En posant $m = n - 1$, $P(S - 1 = m) = e^{-2} \frac{2^m}{m!}$. **Donc** $S - 1 \sim \mathcal{P}(2)$.

Corrigé de l'exercice 16 : Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

1. La variable Z vaut 1 si $X \neq Y$ et 0 sinon. Par indépendance,

$$P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}. \text{ Donc } Z \sim \mathcal{B}(1/2).$$
2. Pour $a, c \in \{0, 1\}$, l'événement $(X = a, Z = c)$ équivaut à $(X = a, Y = b)$, où b est l'unique valeur telle que $|a - b| = c$. Par indépendance, sa probabilité vaut

$$\frac{1}{4} = P(X = a)P(Z = c). \text{ Donc } X \text{ et } Z \text{ sont indépendantes ; par symétrie, } Y \text{ et } Z \text{ aussi.}$$
 De plus, X et Y sont indépendantes par hypothèse.
3. L'événement $(X = 0, Y = 0, Z = 1)$ est vide, car $X = Y$ impose $Z = 0$. Sa probabilité est nulle, alors que $P(X = 0)P(Y = 0)P(Z = 1) = \frac{1}{8}$. **Les trois variables ne sont donc pas mutuellement indépendantes.** En effet, Z est déterminée par X et Y .
4. Les applications $f: x \rightarrow x^2$ et $g: x \rightarrow e^x$ sont définies sur $\mathbb{Z}$. D'après le cours, si U et V sont indépendantes, $f(U)$ et $g(V)$ le sont aussi. En détail, pour a et b dans les images, $P(U^2 = a, e^V = b) = P(U \in f^{-1}(\{a\}), V = \ln b) = P(U^2 = a)P(e^V = b)$.
Donc U^2 et e^V sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 17 : Lemme des coalitions et parité d'une somme

1. Les paquets $\{X_1, X_2\}$ et $\{X_3, X_4\}$ sont disjoints. Par le lemme des coalitions, X_1X_2 et $X_3 + X_4$ sont indépendantes. Ensuite, X_1X_2 vaut 0 ou 1, et

$$P(X_1X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p^2. \text{ Donc } X_1X_2 \sim \mathcal{B}(p^2) \text{ et } X_3 + X_4 \sim \mathcal{B}(2, p).$$
2. Les paquets $\{X_1, X_2\}$ et $\{X_2, X_3\}$ ne sont pas disjoints, et le lemme ne s'applique pas. De fait, $(U = 0, V = 2)$ exige $X_2 = 0$ et $X_2 = 1$: cet événement est vide. Or

$$P(U = 0)P(V = 2) = q^2p^2 \neq 0. \text{ Les variables } U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes.}$$
3. Pour $k \geq 1$, on a la réunion disjointe

$$(S_k \text{ pair}) = (S_{k-1} \text{ pair}, X_k = 0) \cup (S_{k-1} \text{ impair}, X_k = 1).$$

Par le lemme des coalitions, S_{k-1} est indépendante de X_k . Donc

$e_k = q e_{k-1} + p(1 - e_{k-1})$. Ainsi, $e_k = p + (1 - 2p)e_{k-1}$. Pour $k = 1$, la formule reste vraie avec $S_0 = 0$.

4. Le point fixe de $x \rightarrow p + (1 - 2p)x$ est $\frac{1}{2}$. Donc $e_k - \frac{1}{2} = (1 - 2p)(e_{k-1} - \frac{1}{2})$, et $e_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p)^n (e_1 - \frac{1}{2})$. Par conséquent, $e_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$. Comme $0 < p < 1$, on a $|1 - 2p| < 1$. Donc $e_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Rangs des deux premiers succès

- Le théorème d'existence du cours fournit un espace probabilisé portant une suite i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. Ensuite, $(T_1 = +\infty) = \bigcap_n (X_1 = \dots = X_n = 0)$, intersection décroissante. Par continuité décroissante, $P(T_1 = +\infty) = \lim_n q^n = 0$. Pour T_2 , on calculera sa loi à la question 3 et l'on vérifiera que la somme vaut 1. Ainsi, T_1 et T_2 sont finies presque sûrement.
- Soit $1 \leq i < j$. L'événement $(T_1 = i, T_2 = j)$ signifie : échecs aux rangs 1 à $i - 1$ et $i + 1$ à $j - 1$, succès aux rangs i et j . Il fait intervenir j variables indépendantes, dont deux succès. Donc $P(T_1 = i, T_2 = j) = p^2 q^{j-2}$ pour $1 \leq i < j$, et 0 sinon.
- Pour $j \geq 2$, on somme sur $i \in \{1, \dots, j - 1\}$: $P(T_2 = j) = (j - 1)p^2 q^{j-2}$. Par dérivation de la série géométrique, $\sum_{j \geq 2} (j - 1)q^{j-2} = \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{1}{p^2}$. La somme des probabilités vaut donc 1, et T_2 est finie presque sûrement.
- La variable D est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $i, d \geq 1$, $P(T_1 = i, D = d) = P(T_1 = i, T_2 = i + d) = p^2 q^{i+d-2}$. En sommant sur i , $P(D = d) = p q^{d-1} \sum_{i \geq 1} p q^{i-1} = p q^{d-1}$. Ainsi, $P(T_1 = i, D = d) = p q^{i-1} \cdot p q^{d-1} = P(T_1 = i)P(D = d)$. Donc T_1 et

D sont indépendantes, toutes deux de loi $\mathcal{G}(p)$. On retrouve la loi de $T_2 = T_1 + D$ de l'exercice 14.

Corrigé de l'exercice 19 : Tri d'une loi de Poisson

1. Soit $i, j \in \mathbb{N}$ et $n = i + j$. On a $(X = i, N - X = j) = (N = n, X = i)$. Par la formule des probabilités composées,

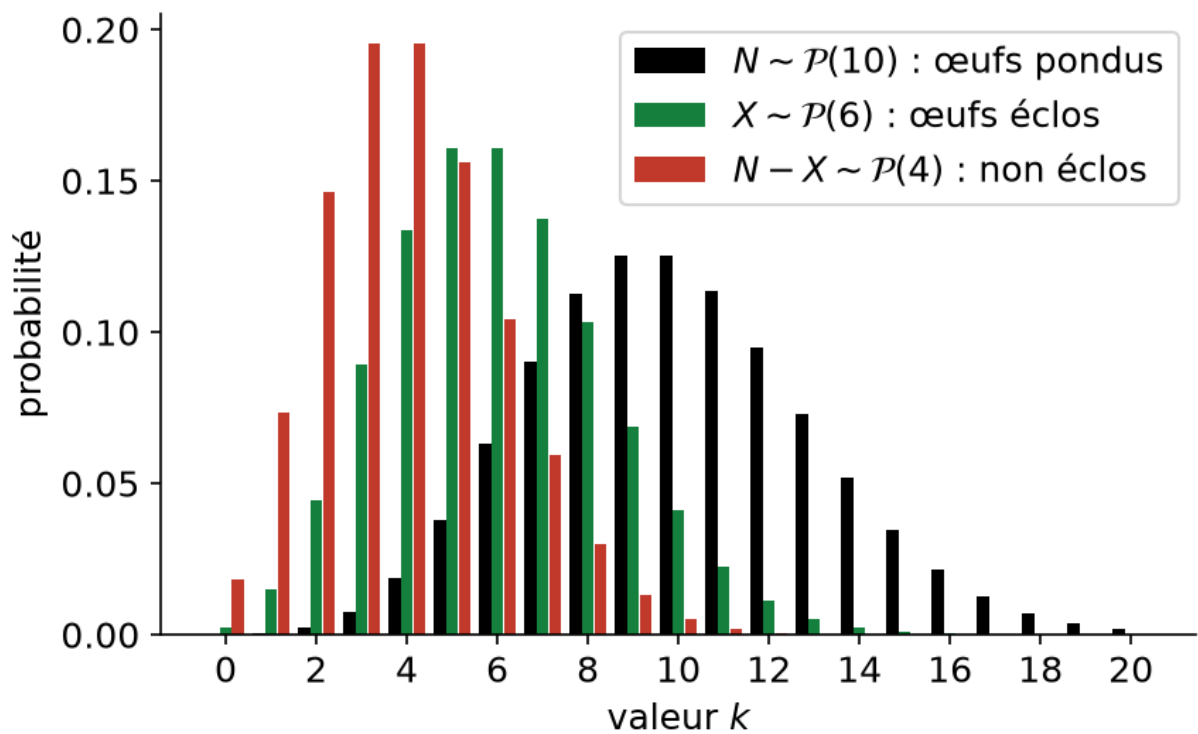
$$P(X = i, N - X = j) = P(N = n) P(X = i | N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{i} p^i q^j.$$

Comme $\frac{1}{n!} \binom{n}{i} = \frac{1}{i! j!}$ et $\lambda^n = \lambda^i \lambda^j$, on obtient

$$P(X = i, N - X = j) = e^{-\lambda} p \frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} q \frac{(\lambda q)^j}{j!}, \text{ car } e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q}.$$

2. En sommant sur j , le second facteur donne 1. **Donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et, de même, $N - X \sim \mathcal{P}(\lambda q)$.**
3. La loi conjointe est le produit des lois marginales : **X et $N - X$ sont indépendantes.** En revanche, X et N ne le sont pas. En effet, $P(X = 1, N = 0) = 0$, alors que $P(X = 1)P(N = 0) > 0$.
4. Pour $\lambda = 10$ et $p = 0,6$, $X \sim \mathcal{P}(6)$. **Donc $P(X = 0) = e^{-6} \approx 0,0025$.**

La figure ci-dessous montre les trois lois : le nombre d'œufs pondus se partage en deux variables de Poisson indépendantes.



Point de méthode : dès que l'on connaît la loi de N et la loi conditionnelle de X sachant N , la formule des probabilités composées donne la loi conjointe. Il reste ensuite à sommer.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, caractérisation des lois géométriques

Partie A.

1. C'est le cas $r = p$ de l'exercice 14 : $P(S = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$ pour $n \geq 2$. En effet, chacun des $n-1$ couples $(k, n-k)$ a pour probabilité $p q^{k-1} p q^{n-k-1} = p^2 q^{n-2}$.

2. Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$P(X = k | S = n) = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(S = n)} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}.$$

La loi conditionnelle est uniforme sur $\{1, \dots, n-1\}$.

Partie B.

1. Pour $n \geq 2$, $P(S = n) \geq P(X = 1, Y = n - 1) = u_1 u_{n-1} > 0$. Ensuite, pour $1 \leq k \leq n - 1$, l'hypothèse et l'indépendance donnent $\frac{u_k u_{n-k}}{P(S = n)} = \frac{1}{n-1}$. **Donc** $u_k u_{n-k} = \frac{P(S = n)}{n-1}$, quantité indépendante de k .
2. Soit $k \geq 1$ et $n = k + 2$. Les indices k et 1 sont dans $\{1, \dots, n-1\}$. La question précédente donne $u_k u_2 = u_1 u_{k+1}$. **Comme** $u_1 > 0$, **on a** $u_{k+1} = \frac{u_2}{u_1} u_k$.
3. Posons $\rho = \frac{u_2}{u_1} > 0$. Par récurrence, $u_k = u_1 \rho^{k-1}$. La série $\sum u_k$ converge, avec une somme 1 , donc $\rho < 1$. Ensuite, $\frac{u_1}{1-\rho} = 1$ donne $u_1 = 1 - \rho$. **Ainsi**, $X \sim \mathcal{G}(1 - \rho)$.
4. Prenons $X = Y = 1$ presque sûrement. Alors $S = 2$ presque sûrement. Le seul n tel que $P(S = n) > 0$ est $n = 2$, et la loi de X sachant $(S = 2)$ est la loi certaine en 1 , c'est-à-dire la loi uniforme sur $\{1\}$. **La loi certaine en 1 vérifie donc l'hypothèse sans être géométrique** : la positivité des u_k est indispensable.

Point de méthode : dans une caractérisation, on transforme l'hypothèse en relation fonctionnelle sur les u_k , puis on choisit des indices qui donnent une récurrence simple.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, caractérisation des lois de Poisson

1. On a $s_n \geq P(X = n, Y = 0) = u_n v_0 > 0$. Pour $0 \leq k \leq n$, par indépendance, $P(X = k | S = n) = \frac{u_k v_{n-k}}{s_n}$. L'hypothèse donne alors $u_k v_{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s_n$.
2. Prenons $n = k + 1$. Avec l'indice $k + 1$, on obtient $u_{k+1} v_0 = p^{k+1} s_{k+1}$. Avec l'indice k , on obtient $u_k v_1 = (k + 1) p^k q s_{k+1}$. Toutes ces quantités sont non nulles. En divisant,

$$\frac{u_{k+1}v_0}{u_kv_1} = \frac{p}{(k+1)q}.$$

Donc $u_{k+1} = \frac{\alpha}{k+1}u_k$, avec $\alpha = \frac{p v_1}{q v_0}$.

3. Par récurrence, $u_k = u_0 \frac{\alpha^k}{k!}$. La condition $\sum_k u_k = 1$ donne $u_0 e^\alpha = 1$. **Ainsi**,
 $u_k = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}$ et $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$.

4. Toujours avec $n = k+1$, l'indice 0 donne $u_0 v_{k+1} = q^{k+1} s_{k+1}$ et l'indice 1 donne
 $u_1 v_k = (k+1)p q^k s_{k+1}$. Donc $\frac{u_0 v_{k+1}}{u_1 v_k} = \frac{q}{(k+1)p}$, c'est-à-dire $v_{k+1} = \frac{\beta}{k+1} v_k$.
 Comme à la question 3, $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$, avec $\beta = \frac{q u_1}{p u_0}$. Or $\frac{u_1}{u_0} = \alpha$. **Donc** $\beta = \frac{q}{p} \alpha$.

5. D'après l'exercice 11, la loi de X sachant $(S = n)$ est $\mathcal{B}\left(n, \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)$. Or
 $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha(1 + q/p)} = \frac{p}{p + q} = p$. **On retrouve bien le paramètre p de l'hypothèse.**

Corrigé de l'exercice 22 : Temps d'attente de deux piles consécutifs

- Notons B_i l'événement « les lancers $2i-1$ et $2i$ donnent tous deux pile ». Les B_i portent sur des paquets disjoints de lancers. Par le lemme des coalitions, ils sont indépendants, et $P(B_i) = \frac{1}{4}$. Si $T > 2k$, aucun des $B_1, \dots, B_k$ n'est réalisé. Donc
 $P(T > 2k) \leq P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_k}) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$. Enfin, $(T = +\infty) \subset (T > 2k)$ pour tout k . **Donc** $P(T = +\infty) = 0$.
- D'abord, $a_1 = 2$ (mots P et F) et $a_2 = 3$ (mots PF , FP , FF). Soit $m \geq 2$. Un mot admissible de longueur m finit par F ou par P . S'il finit par F , son préfixe de longueur $m-1$ est un mot admissible quelconque : a_{m-1} choix. S'il finit par P , la lettre précédente est F et le préfixe de longueur $m-2$ est admissible : a_{m-2} choix. **Donc**
 $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$. C'est la suite de Fibonacci décalée : $a_m = F_{m+2}$.
- L'événement $(T = 2)$ est « pile, pile », de probabilité $\frac{1}{4}$. Soit $n \geq 3$. On a $T = n$ si et seulement si : les lancers $n-1$ et n sont des piles, le lancer $n-2$ est face, et les $n-3$ premiers lancers ne contiennent pas deux piles consécutifs. En effet, un pile en $n-2$ donnerait un double pile dès le rang $n-1$. Réciproquement, ces conditions excluent tout double pile avant

le rang n . Chaque suite de n résultats a pour probabilité 2^{-n} , et il y a a_{n-3} suites convenables. **Donc** $P(T = n) = \frac{a_{n-3}}{2^n}$ pour $n \geq 3$.

4. Pour $n \geq 5$, la relation $a_{n-3} = a_{n-4} + a_{n-5}$ donne

$$p_n = \frac{a_{n-4}}{2^n} + \frac{a_{n-5}}{2^n} = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}. \text{ Pour } n = 4, \text{ on vérifie à la main :}$$

$$p_4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \text{ et } \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}. \text{ Notons } \Sigma = \sum_{n \geq 2} p_n, \text{ qui est finie et}$$

vaut au plus 1. En sommant la relation pour $n \geq 4$,

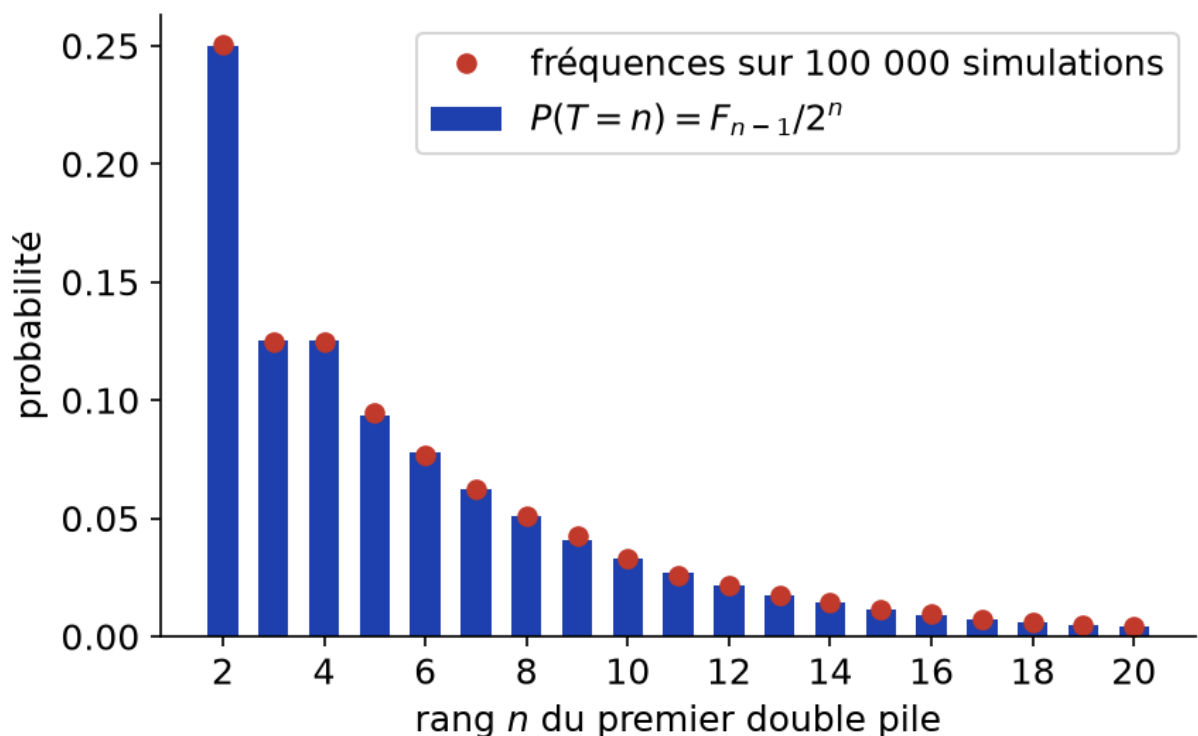
$$\Sigma - p_2 - p_3 = \frac{1}{2}(\Sigma - p_2) + \frac{1}{4}\Sigma.$$

Avec $p_2 = \frac{1}{4}$ et $p_3 = \frac{1}{8}$, on obtient $\frac{1}{4}\Sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. **Donc** $\Sigma = 1$, ce qui confirme la question 1.

5. On a $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, $p_4 = \frac{1}{8}$ et $p_5 = \frac{a_2}{32} = \frac{3}{32}$. **Donc**

$$P(T \leq 5) = \frac{8 + 4 + 4 + 3}{32} = \frac{19}{32}.$$

La figure ci-dessous confronte la loi obtenue aux fréquences observées sur 100 000 simulations. L'accord est excellent, et l'on retrouve $p_n = \frac{F_{n-1}}{2^n}$.



Point de méthode : pour montrer qu'un temps d'attente est fini presque sûrement, découpez les épreuves en blocs indépendants de même loi, puis majorez par une suite géométrique.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [variables aléatoires discrètes, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur variables aléatoires discrètes](#)
- À maîtriser avant : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)
- Chapitre précédent : [Ensembles dénombrables et espaces probabilisés](#)
- Chapitre suivant : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#)
- Le même thème en L2 : [variables aléatoires discrètes, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)