

Variables aléatoires discrètes

Corrigé de l'exercice 1 : Loi uniforme discrète

1. La variable X est finie, donc elle admet des moments de tout ordre. D'abord,

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \text{ Ensuite, par le théorème de transfert,}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ La formule de König-Huygens donne alors}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

Ainsi, $E(X) = \frac{n+1}{2}$ **et** $V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$

2. Pour $x \in [k, k+1[$, l'événement $\{X \leq x\}$ est égal à $\{X \leq k\}$, réunion disjointe de k événements de probabilité $\frac{1}{n}$. **Donc** $F_X(x) = \frac{k}{n}$. De plus, $F_X = 0$ sur $] -\infty, 1[$ et $F_X = 1$ sur $[n, +\infty[$.
3. L'application $k \rightarrow n+1-k$ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Par conséquent, pour tout k , $P(Y = k) = P(X = n+1-k) = \frac{1}{n}$. **Donc** Y **suit la loi uniforme sur** $\{1, \dots, n\}$. En particulier, $E(Y) = E(X)$. Or, par linéarité, $E(Y) = n+1 - E(X)$. Ainsi, $2E(X) = n+1$.
4. Pour $n = 6$, on obtient $E(X) = 3,5$ et $V(X) = \frac{35}{12}$. **L'écart type vaut** $\sqrt{35/12} \approx 1,71$.

Point de méthode : une symétrie de la loi donne souvent l'espérance sans calcul ; ici, la loi est symétrique par rapport à $\frac{n+1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Maximum et minimum de deux dés

1. On a $\{M \leq k\} = \{X \leq k\} \cap \{Y \leq k\}$. Par indépendance, $P(M \leq k) = \frac{k}{6} \cdot \frac{k}{6} = \frac{k^2}{36}$.

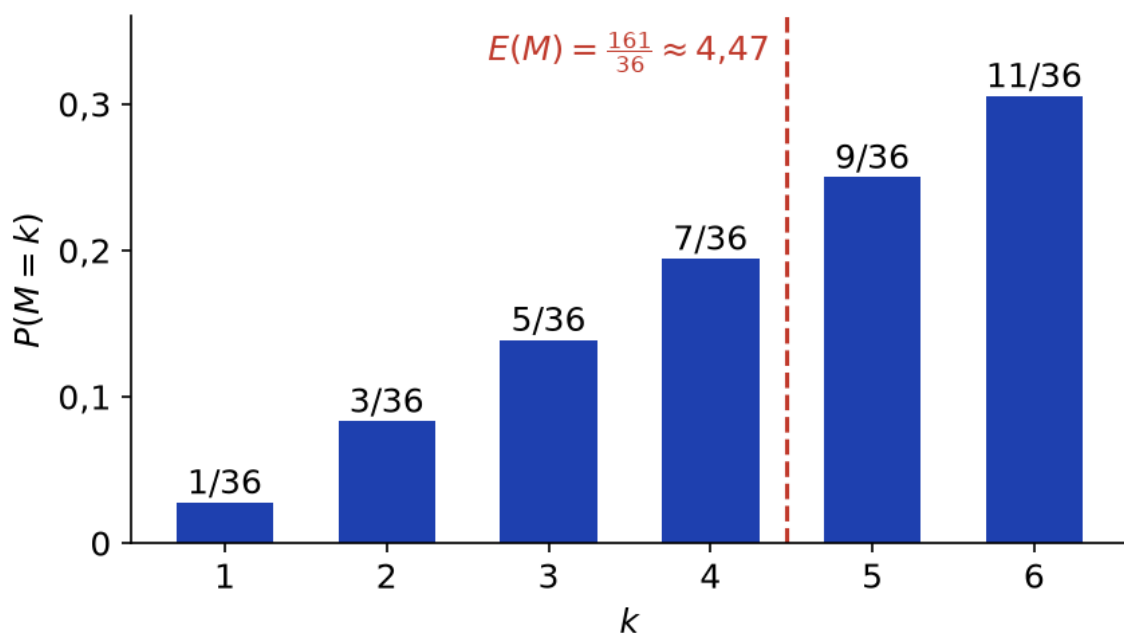
Ensuite, $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1)$. **Donc**

$$P(M = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36} \text{ pour } 1 \leq k \leq 6. \text{ On vérifie que}$$

$$\sum_{k=1}^6 (2k-1) = 36.$$

2. On calcule $E(M) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 (2k^2 - k) = \frac{2 \times 91 - 21}{36}$. **Ainsi**, $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$.

La figure ci-dessous montre la loi obtenue : elle est croissante, ce qui place l'espérance au-dessus de 3,5.



3. De même, $\{m \geq k\} = \{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}$, donc $P(m \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}$. Par différence, $P(m = k) = P(m \geq k) - P(m \geq k+1)$. **Donc**

$$P(m = k) = \frac{(7-k)^2 - (6-k)^2}{36} = \frac{13-2k}{36}.$$

4. Parmi les deux nombres X et Y , l'un est le maximum et l'autre le minimum. Donc

$$M + m = X + Y. \text{ Par linéarité, } E(m) = E(X) + E(Y) - E(M) = 7 - \frac{161}{36}.$$

Ainsi, $E(m) = \frac{91}{36} \approx 2,53$. On retrouve ce résultat directement :

$$\sum_k k(13 - 2k) = 13 \times 21 - 2 \times 91 = 91.$$

Point de méthode : pour un maximum, passez par $P(M \leq k)$; pour un minimum, par $P(m \geq k)$. L'indépendance transforme alors l'intersection en produit.

Corrigé de l'exercice 3 : Loi lue sur une fonction de répartition

- La fonction F_X est constante par morceaux et saute en -1 , 0 , 2 et 3 . La hauteur de chaque saut vaut $P(X = x)$. **Donc** $X(\Omega) = \{-1, 0, 2, 3\}$, **avec** $P(X = -1) = 0,2$, $P(X = 0) = 0,3$, $P(X = 2) = 0,4$ **et** $P(X = 3) = 0,1$.
- On a $P(0 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(0) = 0,9 - 0,5 = 0,4$. Ensuite, $P(X < 2) = F_X(2) - P(X = 2) = 0,5$. Enfin, $P(X \geq 0) = 1 - P(X = -1) = 0,8$. **Les trois probabilités valent** $0,4$, $0,5$ **et** $0,8$.
- D'abord, $E(X) = -0,2 + 0 + 0,8 + 0,3 = 0,9$. Ensuite, $E(X^2) = 0,2 + 0 + 1,6 + 0,9 = 2,7$. **Donc** $E(X) = 0,9$ **et** $V(X) = 2,7 - 0,81 = 1,89$.
- La variable $Y = X^2$ prend les valeurs 1 , 0 , 4 et 9 . Comme $x \rightarrow x^2$ est injective sur $X(\Omega)$, $P(Y = 0) = 0,3$, $P(Y = 1) = 0,2$, $P(Y = 4) = 0,4$ **et** $P(Y = 9) = 0,1$. Ainsi, $E(Y) = 0,2 + 1,6 + 0,9 = 2,7$, ce qui coïncide avec $E(X^2)$ obtenu par transfert.

Corrigé de l'exercice 4 : Tirages avec et sans remise

- Avec remise, les trois tirages sont indépendants et donnent une boule rouge avec probabilité $0,4$. Donc $X \sim \mathcal{B}(3; 0,4)$. Ainsi, $P(X = 0) = 0,216$, $P(X = 1) = 0,432$, $P(X = 2) = 0,288$ et $P(X = 3) = 0,064$. **De plus,** $E(X) = 1,2$ **et**

$$V(X) = 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72.$$

2. Sans remise, tous les sous-ensembles de trois boules sont équiprobables, et il y en a

$\binom{10}{3} = 120$. Donc X suit la loi hypergéométrique

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}. \text{ On obtient } P(X = 0) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6},$$

$P(X = 1) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$ et $P(X = 3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$. La somme des numérateurs vaut bien 120.

3. On calcule $E(X) = \frac{60 + 72 + 12}{120} = 1,2$. Ensuite, $E(X^2) = \frac{60 + 144 + 36}{120} = 2$. Donc $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 2 - 1,44 = 0,56$.

4. Les espérances sont égales, mais la variance sans remise est plus petite. En effet, $\frac{0,56}{0,72} = \frac{7}{9}$. Ce rapport vaut $\frac{N-n}{N-1}$ avec $N = 10$ et $n = 3$. Intuitivement, tirer sans remise réduit l'aléa, car chaque tirage renseigne sur la composition restante.

Corrigé de l'exercice 5 : Moments de la loi géométrique

1. La série entière $\sum x^k$ a pour rayon 1 et pour somme $\frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ pour $|x| < 1$.

2. Les termes $k P(X = k) = p k q^{k-1}$ sont positifs. Leur série converge, car $0 < q < 1$.

Donc X admet une espérance, et $E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$. De même, par transfert,

$$E(X(X-1)) = p q \sum_{k \geq 2} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}. \text{ Comme}$$

$X^2 = X(X-1) + X$, la variable X^2 admet une espérance. Ensuite,

$$V(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Ainsi, $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

3. On somme une série géométrique :

$$P(X > n) = \sum_{k \geq n+1} p q^k - 1 = p q^n \cdot \frac{1}{1-q} = q^n. \text{ Ensuite,}$$

$\{X > m+n\} \subset \{X > m\}$, donc $P(X > m+n | X > m) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n$. **C'est bien $P(X > n)$: la loi géométrique est sans mémoire.**

4. Le rang du premier 6 suit la loi $\mathcal{G}(1/6)$. **Donc l'espérance vaut 6, la variance vaut**

$$\frac{5/6}{1/36} = 30, \text{ et } P(X > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,162.$$

Corrigé de l'exercice 6 : Loi de Poisson, moments et mode

1. Les termes $k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ sont positifs. De plus, $\sum_{k \geq 1} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^\lambda$. Donc

$$E(X) = \lambda. \text{ De même, } E(X(X-1)) = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2. \text{ Par conséquent,}$$

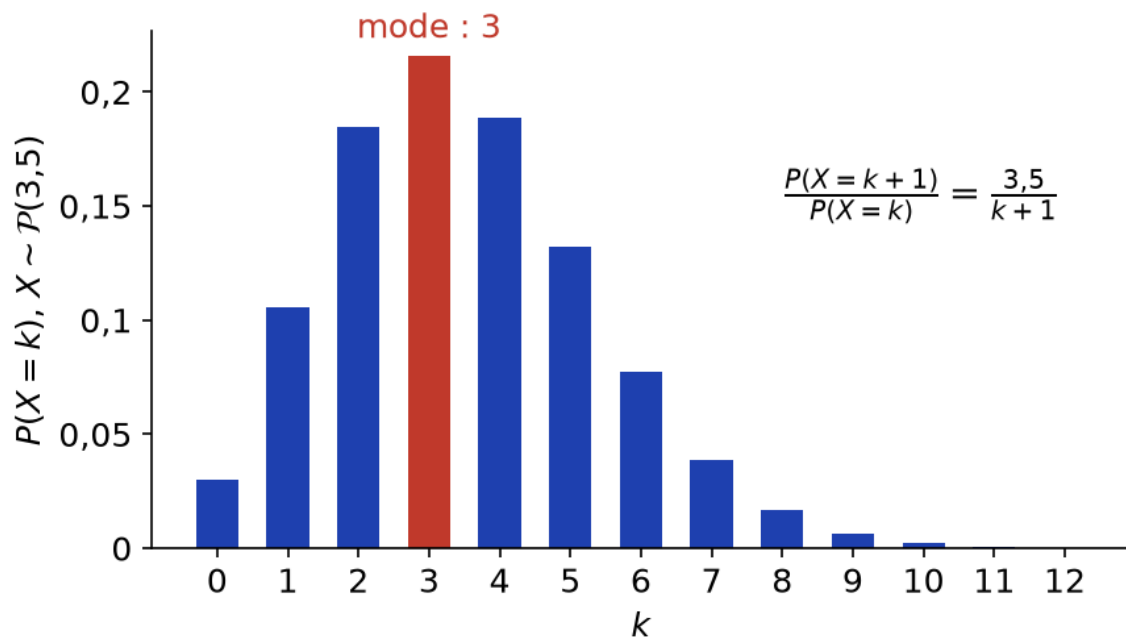
$$X^2 = X(X-1) + X \text{ admet une espérance, égale à } \lambda^2 + \lambda. \text{ Finalement,}$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

2. On calcule $\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k+1}$. Ce quotient dépasse 1 si et seulement si $k+1 < \lambda$.

Pour $\lambda = 3,5$, la suite $P(X = k)$ croît tant que $k \leq 2$, puis décroît à partir de $k = 3$.

La valeur la plus probable est donc 3, avec $P(X = 3) \approx 0,216$. La figure ci-dessous le confirme.



3. La fonction $k \rightarrow \frac{1}{k+1}$ est bornée, donc le transfert s'applique. On obtient

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1)}{\lambda}.$$

Ainsi, $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$

4. On somme sur les indices pairs : $P(X \in 2\mathbb{N}) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh \lambda$. **Donc**

$$P(X \text{ pair}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}, \text{ qui est toujours supérieur à } \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 7 : Une variable aléatoire sans espérance

1. Les nombres $\frac{1}{n(n+1)}$ sont positifs. De plus, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc la somme partielle vaut $1 - \frac{1}{N+1}$. **Elle tend vers 1 : on a bien une loi de probabilité.**

2. Par le même télescopage, $P(X \geq n) = \sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$. **Donc** $P(X \geq n) = \frac{1}{n}$.

3. On a $n P(X = n) = \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente. **Donc** X , qui est **positive, n'admet pas d'espérance** : $E(X) = +\infty$. En revanche, $\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, terme d'une série de Riemann convergente. **Donc** $\sqrt{X}$ **admet une espérance**.

4. On écrit $P(Y \geq k) = \sum_{j=k}^N P(Y = j)$. Puis on échange les deux sommes finies :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=k}^N P(Y = j) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j P(Y = j) = \sum_{j=1}^N j P(Y = j). \text{ Ainsi,}$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^N P(Y \geq k).$$

5. La variable Y_N prend ses valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. Pour $k \leq N$, on a $\{\min(X, N) \geq k\} = \{X \geq k\}$. Donc, d'après la question précédente,

$$E(Y_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = H_N. \text{ Ainsi, } E(Y_N) = H_N \rightarrow +\infty, \text{ ce qui confirme}$$

l'absence d'espérance de X .

Point de méthode : pour une variable positive, l'existence de l'espérance se ramène à la convergence d'une série à termes positifs ; un équivalent ou une comparaison suffit.

Corrigé de l'exercice 8 : Théorème de transfert et convergence absolue

1. La fonction $k \rightarrow \frac{1}{k}$ est bornée par 1 sur $\mathbb{N}^*$, donc $\frac{1}{X}$ admet une espérance. Par transfert,

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k}. \text{ Or } \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \text{ pour } |x| < 1.$$

$$\text{Donc } E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p}{q} \ln(1-q) = -\frac{p \ln p}{q}.$$

2. La variable $(-1)^X$ est bornée. Par transfert,

$$E((-1)^X) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k p q^{k-1} = -p \sum_{j \geq 0} (-q)^j. \text{ Ainsi, } E((-1)^X) = -\frac{p}{1+q}.$$

Ensuite, $(-1)^X = 2 \cdot 1_{\{X \text{ pair}\}} - 1$. Par linéarité,

$$P(X \text{ pair}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{1+q} \right) = \frac{1+q-p}{2(1+q)} = \frac{q}{1+q}, \text{ car } 1-p=q. \text{ Directement,}$$

$$\sum_{j \geq 1} p q^{2j-1} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}. \text{ Les deux méthodes donnent } P(X \text{ pair}) = \frac{q}{1+q}.$$

3. La variable a^X est positive. D'après le transfert, elle admet une espérance si et seulement si $\sum_k a^k p q^{k-1}$ converge. Cette série géométrique converge si et seulement si $aq < 1$. **Donc a^X admet une espérance si et seulement si $a < \frac{1}{q}$, et alors**
- $$E(a^X) = ap \sum_{k \geq 1} (aq)^{k-1} = \frac{ap}{1-aq}.$$
4. Ici $p = q = \frac{1}{2}$ et $a = 2$, donc $aq = 1$. Les termes $2^k \cdot 2^{-k} = 1$ forment une série divergente. **Le gain n'a pas d'espérance :** $E(2^X) = +\infty$. C'est le paradoxe dit de Saint-Pétersbourg.

Corrigé de l'exercice 9 : Points fixes d'une permutation aléatoire

1. Les permutations qui fixent i correspondent aux permutations des $n-1$ autres éléments. Donc $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ensuite, $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$. **Par linéarité,**
- $$E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$
2. De même, les permutations qui fixent i et j sont au nombre de $(n-2)!$. Donc
- $$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}. \text{ Or } E(1_{A_i} 1_{A_j}) = P(A_i \cap A_j). \text{ Ainsi,}$$
- $$\text{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$
3. Chaque indicatrice a pour variance $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$. La formule de la variance d'une somme comporte $n(n-1)$ couples ordonnés (i, j) avec $i \neq j$. Donc
- $$V(X) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

Ainsi, $V(X) = 1$, quel que soit $n \geq 2$.

4. Si $X \geq 11$, alors $|X - 1| \geq 10$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne
 $P(X \geq 11) \leq \frac{V(X)}{10^2}$. Donc cette probabilité est au plus 0,01.

Point de méthode : une variable de comptage s'écrit comme une somme d'indicateurs ; l'espérance vient alors sans la loi, et la variance ne demande que les probabilités des intersections deux à deux.

Corrigé de l'exercice 10 : Couple de variables et covariance

- On somme par ligne et par colonne. La loi de X est $P(X = 0) = 0,3$,
 $P(X = 1) = 0,3$, $P(X = 2) = 0,4$; celle de Y est $P(Y = 0) = 0,6$,
 $P(Y = 1) = 0,4$. Or $P(X = 0, Y = 0) = 0,1$, tandis que
 $P(X = 0)P(Y = 0) = 0,18$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
- On calcule $E(X) = 0,3 + 0,8 = 1,1$ et $E(X^2) = 0,3 + 1,6 = 1,9$, d'où
 $V(X) = 1,9 - 1,21 = 0,69$. Ensuite, $E(Y) = 0,4$ et $V(Y) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
Enfin, $E(XY) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,1 = 0,3$. Donc
 $\text{Cov}(X, Y) = 0,3 - 1,1 \times 0,4 = -0,14$.
- On a $\rho(X, Y) = \frac{-0,14}{\sqrt{0,69 \times 0,24}} = \frac{-0,14}{\sqrt{0,1656}}$. Ainsi, $\rho(X, Y) \approx -0,344$: la corrélation est négative et modérée.
- On divise la colonne $y = 1$ par $P(Y = 1) = 0,4$. Sachant $Y = 1$, X vaut 0, 1, 2 avec les probabilités 0,5, 0,25, 0,25, et son espérance conditionnelle vaut $0,25 + 0,5 = 0,75$. Elle est inférieure à $E(X) = 1,1$, ce qui est cohérent avec une covariance négative.
- La variable S prend les valeurs 0 à 3. On regroupe les cases de même somme :
 $P(S = 0) = 0,1$, $P(S = 1) = 0,2 + 0,2 = 0,4$, $P(S = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$ et
 $P(S = 3) = 0,1$. Ainsi, $E(S) = 1,5$ et $E(S^2) = 0,4 + 1,6 + 0,9 = 2,9$. Donc
 $V(S) = 2,9 - 2,25 = 0,65$. On retrouve $0,69 + 0,24 - 0,28 = 0,65$.

Corrigé de l'exercice 11 : Loi conjointe factorisée et indépendance

1. La famille est positive si et seulement si $a \geq 0$. Par sommation par paquets,

$$\sum_{i,j} \frac{1}{i! j!} = \sum_i \frac{1}{i!} \sum_j \frac{1}{j!} = e^2. \text{ La somme vaut } 1 \text{ si et seulement si } a = e^{-2}.$$

2. On a $P(X = i) = \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-2}}{i! j!} = \frac{e^{-2} e}{i!} = e^{-1} \frac{1}{i!}$. Donc $X \sim \mathcal{P}(1)$, et de même $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

3. Pour tous i, j , $P(X = i) P(Y = j) = \frac{e^{-2}}{i! j!} = P(X = i, Y = j)$. Les variables sont indépendantes, donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

4. D'après le cours, la somme de deux variables de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson de paramètre la somme. Donc $X + Y \sim \mathcal{P}(2)$ et

$$P(X + Y = 2) = e^{-2} \frac{2^2}{2!} = 2e^{-2} \approx 0,271.$$

Corrigé de l'exercice 12 : Minimum de deux lois géométriques indépendantes

1. On a $\{Z > n\} = \{X > n\} \cap \{Y > n\}$. Par indépendance, et d'après l'exercice 5,

$$P(Z > n) = (1 - p)^n (1 - r)^n = ((1 - p)(1 - r))^n.$$

2. Posons $s = 1 - (1 - p)(1 - r) = p + r - pr$, qui appartient à $]0, 1[$. Alors

$$P(Z = n) = P(Z > n - 1) - P(Z > n) = (1 - s)^{n-1} - (1 - s)^n = s(1 - s)^{n-1}. \text{ Donc } Z \sim \mathcal{G}(p + r - pr) \text{ et } E(Z) = \frac{1}{p + r - pr}.$$

3. On décompose selon la valeur commune :

$$P(X = Y) = \sum_{k \geq 1} P(X = k) P(Y = k) = pr \sum_{k \geq 1} ((1 - p)(1 - r))^{k-1}. \text{ Donc } P(X = Y) = \frac{pr}{p + r - pr}.$$

4. Ici $p = r = \frac{1}{2}$, donc $s = \frac{3}{4}$. Le nombre moyen de lancers simultanés vaut $\frac{4}{3}$, et la probabilité d'un premier pile au même lancer vaut $\frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Covariance nulle et indépendance

- Par symétrie, $E(X) = 0$ et $E(XY) = E(X^3) = 0$. Donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Cependant, $P(X = 0, Y = 1) = 0$, alors que $P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. **La covariance est nulle, mais X et Y ne sont pas indépendantes.**
- Le sens direct est dans le cours. Réciproquement, UV est l'indicatrice de $\{U = 1, V = 1\}$.
Donc $\text{Cov}(U, V) = P(U = 1, V = 1) - P(U = 1)P(V = 1)$. Si elle est nulle, la formule de produit vaut pour le couple $(1, 1)$. Ensuite,
 $P(U = 1, V = 0) = P(U = 1) - P(U = 1, V = 1) = P(U = 1)(1 - P(V = 1))$. On traite de même $(0, 1)$, puis $(0, 0)$ par complémentaire. **Pour des variables de Bernoulli, indépendance et covariance nulle sont donc équivalentes.**
- Par bilinéarité, $\text{Cov}(X, aX + b) = aV(X)$. De plus, $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$. Donc $\rho(X, aX + b) = \frac{a}{|a|}$, qui vaut 1 si $a > 0$ et -1 si $a < 0$.
- Pour tout réel t , $V(Y - tX) = V(X)t^2 - 2\text{Cov}(X, Y)t + V(Y) \geq 0$. Si $|\rho| = 1$, le discriminant réduit $\text{Cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y)$ est nul. Le trinôme admet donc une racine double $t_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$. Ainsi, $V(Y - t_0 X) = 0$, et $Y - t_0 X$ est presque sûrement égale à une constante b . **Donc $Y = t_0 X + b$ presque sûrement.**

Corrigé de l'exercice 14 : Somme de deux lois uniformes indépendantes

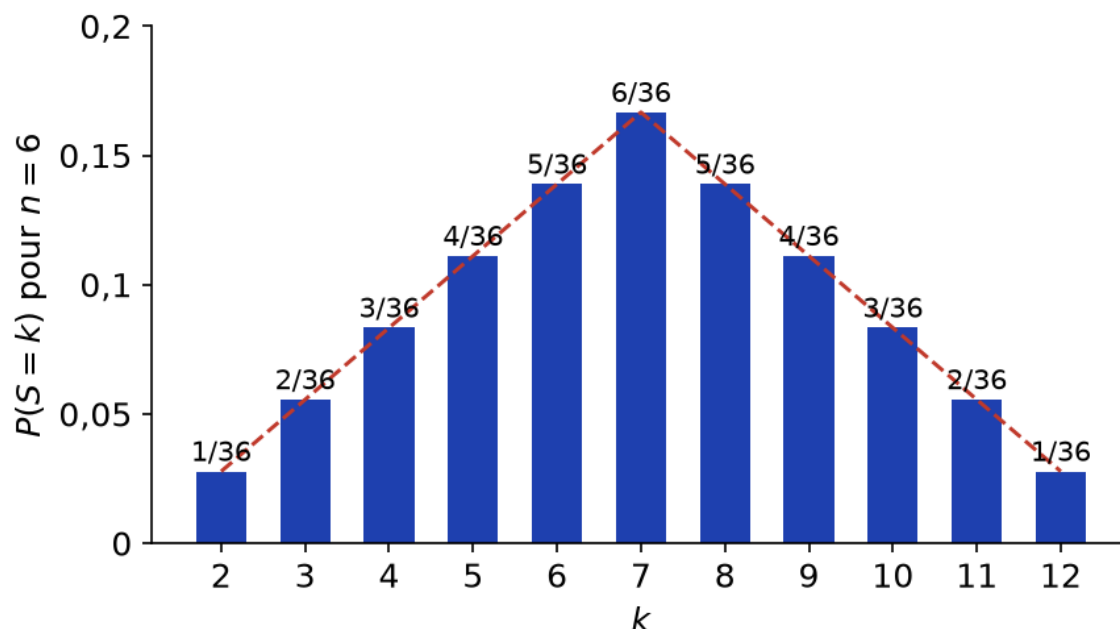
- La variable S prend ses valeurs dans $\left\{2, \frac{fs4}{4}, \dots, 2n\right\}$. Par indépendance,

$P(S = k) = \sum_i P(X = i) P(Y = k - i)$, où i vérifie $1 \leq i \leq n$ et

$1 \leq k - i \leq n$. Chaque terme vaut $\frac{1}{n^2}$. On compte donc les entiers i de

$[\max(1, k - n), \min(n, k - 1)]$. Ainsi, $P(S = k) = \frac{k-1}{n^2}$ pour $2 \leq k \leq n+1$, et

$P(S = k) = \frac{2n+1-k}{n^2}$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$. C'est une loi triangulaire, comme le montre la figure ci-dessous pour $n = 6$.



2. Par linéarité, $E(S) = 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n+1$. Par indépendance, les variances s'ajoutent. **Donc** $E(S) = n+1$ et $V(S) = \frac{n^2-1}{6}$.

3. La variable D prend les valeurs 0 à $n-1$. D'abord,

$P(D = 0) = P(X = Y) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Ensuite, pour $k \geq 1$, les couples tels que $X - Y = k$ sont $(k+j, j)$ avec $1 \leq j \leq n-k$. Il y en a $n-k$, et autant pour $Y - X = k$. **Donc** $P(D = k) = \frac{2(n-k)}{n^2}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Enfin, $\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$.

4. Pour $n = 6$, le maximum de $P(S = k)$ est atteint en $k = n+1 = 7$. **La somme la plus probable est 7, avec probabilité $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Reconnaître une loi par sa fonction génératrice

1. On écrit $G(t) = \frac{t/3}{1 - \frac{2}{3}t}$. C'est la fonction génératrice de $\mathcal{G}(1/3)$, et la fonction génératrice caractérise la loi. Ensuite, $G'(t) = \frac{3}{(3-2t)^2}$ et $G''(t) = \frac{12}{(3-2t)^3}$. Le rayon vaut $\frac{3}{2} > 1$, donc $E(X) = G'(1) = 3$ et $G''(1) = 12$. **Ainsi, $X \sim \mathcal{G}(1/3)$, $E(X) = 3$ et $V(X) = 12 + 3 - 9 = 6$.**

2. On a $G(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)^4$. **Donc $X \sim \mathcal{B}(4, 1/3)$.** Ensuite, $G'(t) = \frac{4}{3}\left(\frac{2+t}{3}\right)^3$ et $G''(t) = \frac{4}{3}\left(\frac{2+t}{3}\right)^2$. **Ainsi, $G'(1) = \frac{4}{3}$ et $G''(1) = \frac{4}{3}$. Donc $E(X) = \frac{4}{3}$ et $V(X) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$, conforme à npq .**

3. On développe : $e^{3(t^2-1)} = e^{-3} \sum_{k \geq 0} \frac{3^k}{k!} t^{2k}$. Par unicité des coefficients, **X prend les valeurs paires, avec $P(X = 2k) = e^{-3} \frac{3^k}{k!}$: ainsi, $X = 2Z$ avec $Z \sim \mathcal{P}(3)$.** Ensuite, $G'(t) = 6t G(t)$ et $G''(t) = (6 + 36t^2) G(t)$. Donc $G'(1) = 6$ et $G''(1) = 42$. **Ainsi, $E(X) = 6$ et $V(X) = 42 + 6 - 36 = 12$, ce qui vaut bien $4V(Z)$.**

4. Par indépendance, la fonction génératrice de la somme est le produit. **Elle vaut**

$$G(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^r. \text{ Notons } G_1 \text{ la fonction génératrice de } \mathcal{G}(p). \text{ Alors}$$

$$G'(1) = r G_1'(1) = \frac{r}{p} \text{ et } G''(1) = r(r-1) G_1'(1)^2 + r G_1''(1) = \frac{r(r-1) + 2rq}{p^2}.$$

Donc

$$V = \frac{r(r-1) + 2rq}{p^2} + \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(2q + p - 1)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}.$$

On obtient $E = \frac{r}{p}$ et $V = \frac{rq}{p^2}$, comme l'annoncent la linéarité et l'additivité des variances.

Corrigé de l'exercice 16 : Somme de variables de Poisson indépendantes

1. Par indépendance, $G_S(t) = G_X(t) G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$. On reconnaît la fonction génératrice de $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$. **Par unicité**, $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on décompose selon la valeur de X :

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}.$$

La formule du binôme donne $P(S = n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$.

3. Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\{X = k, S = n\} = \{X = k, Y = n - k\}$. Donc

$$P(X = k | S = n) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}.$$

Sachant $S = n$, X suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

4. Ici, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0,4$ et $n = 5$. **La probabilité cherchée vaut**

$$\binom{5}{2} (0,4)^2 (0,6)^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456.$$

Corrigé de l'exercice 17 : Amincissement d'une loi de Poisson

1. On a $\{X = j, Y = k\} = \{N = j+k, X = j\}$. Donc, par la définition de la loi conditionnelle,

$$P(X = j, Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} j+k j[\text{right?}] p^j q^k = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j (\lambda q)^k}{j! k!}.$$

Comme $e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q}$, on obtient

$$P(X = j, Y = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!}.$$

2. On somme sur k la série exponentielle : $P(X = j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}$. De même pour Y .

Donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda q)$, et la loi conjointe est le produit des marginales : X et Y sont indépendantes. Ce résultat est remarquable, car X et Y dépendent toutes deux de N .

3. Pour $|t| \leq 1$, la formule des probabilités totales donne

$$P(X = j) = \sum_{n \geq j} P(N = n) \binom{n}{j} p^j q^{n-j}. \text{ La famille double}$$

$$\left(P(N = n) \binom{n}{j} p^j q^{n-j} t^j \right)_{j \leq n} \text{ est sommable, car sa somme en module est}$$

$$\sum_n P(N = n) (q + p|t|)^n \leq 1. \text{ On somme donc d'abord en } j \text{ par la formule du binôme :}$$

$$G_X(t) = \sum_n P(N = n) (q + pt)^n. \text{ Donc}$$

$$G_X(t) = G_N(q + pt) = e^{\lambda(q + pt - 1)} = e^{\lambda p(t - 1)}, \text{ qui est la fonction génératrice de } \mathcal{P}(\lambda p).$$

4. Par bilinéarité et indépendance de X et Y ,

$$\text{Cov}(X, N) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = V(X). \text{ Donc } \text{Cov}(X, N) = \lambda p.$$

5. On a $X \sim \mathcal{P}(3)$. **En moyenne, il y a 3 acheteurs, et $P(X = 0) = e^{-3} \approx 0,050$.**

Point de méthode : pour un couple défini en deux étapes, écrivez la loi conjointe comme produit « loi de la première étape $\times$ loi conditionnelle », puis cherchez une factorisation.

Corrigé de l'exercice 18 : Dés truqués et somme uniforme

1. D'après l'exercice 14, $P(S = 2) = \frac{1}{36}$ et $P(S = 7) = \frac{1}{6}$. **La loi de S n'est donc pas uniforme pour deux dés équilibrés.**

2. On a $G_X(t) = \sum_{k=1}^6 P(X = k) t^k = t \sum_{k=1}^6 P(X = k) t^{k-1}$. **Donc**

$G_X(t) = t P(t)$ avec $P(t) = \sum_{j=0}^5 P(X = j+1) t^j$, de degré au plus 5 ; de même pour Y .

3. Par indépendance, $G_S = G_X G_Y = t^2 P Q$. Si S est uniforme,

$$G_S(t) = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{t^2}{11} \sum_{k=0}^{10} t^k. \text{ Pour } t \neq 0, \text{ on simplifie par } t^2. \text{ Deux polynômes}$$

égaux en une infinité de points sont égaux. **Donc** $P Q = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} t^k$. Ce polynôme est de degré 10. Or $\deg P \leq 5$, $\deg Q \leq 5$ et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. **Donc** $\deg P = \deg Q = 5$.

4. Pour $t \neq 1$, $\sum_{k=0}^{10} t^k = \frac{t^{11}-1}{t-1}$, qui ne s'annule que si $t^{11} = 1$, c'est-à-dire $t = 1$ sur $\mathbb{R}$. Or ce cas est exclu, et la somme vaut 11 en $t = 1$. **Donc ce polynôme n'a pas de racine réelle.** En revanche, P est un polynôme réel de degré impair. Ses limites en $\pm\infty$ sont infinies et de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P a une racine réelle t_0 . Alors t_0 annule PQ , ce qui est absurde. **Aucun truquage ne rend la somme uniforme sur $\left\{2, \frac{1}{4}, \dots, 12\right\}$.**

Corrigé de l'exercice 19 : Inégalité de Markov et qualité de la majoration

1. On a $P(X \geq 10) = P(X > 9) = \left(\frac{1}{2}\right)^9$. **Donc** $P(X \geq 10) = \frac{1}{512} \approx 0,00195$.

2. D'abord, $E(X) = 2$. Markov donne $P(X \geq 10) \leq \frac{2}{10} = 0,2$. Ensuite, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2 + 4 = 6$. Or $\{X \geq 10\} = \{X^2 \geq 100\}$, car $X \geq 0$. **Les deux majorations valent donc 0,2 et 0,06.**

3. Si $X \geq 10$, alors $|X - 2| \geq 8$. Par Bienaymé-Tchebychev, $P(X \geq 10) \leq \frac{V(X)}{64}$. **Donc** $P(X \geq 10) \leq \frac{2}{64} = \frac{1}{32} \approx 0,031$.

4. Avec $a = 1,8$, on a $a^9 = 0,9 < 1$. D'après l'exercice 8, $E(a^X) = \frac{0,9}{1-0,9} = 9$. Ensuite, $t \rightarrow a^t$ est croissante, donc $\{X \geq 10\} = \{a^X \geq a^{10}\}$. Markov donne

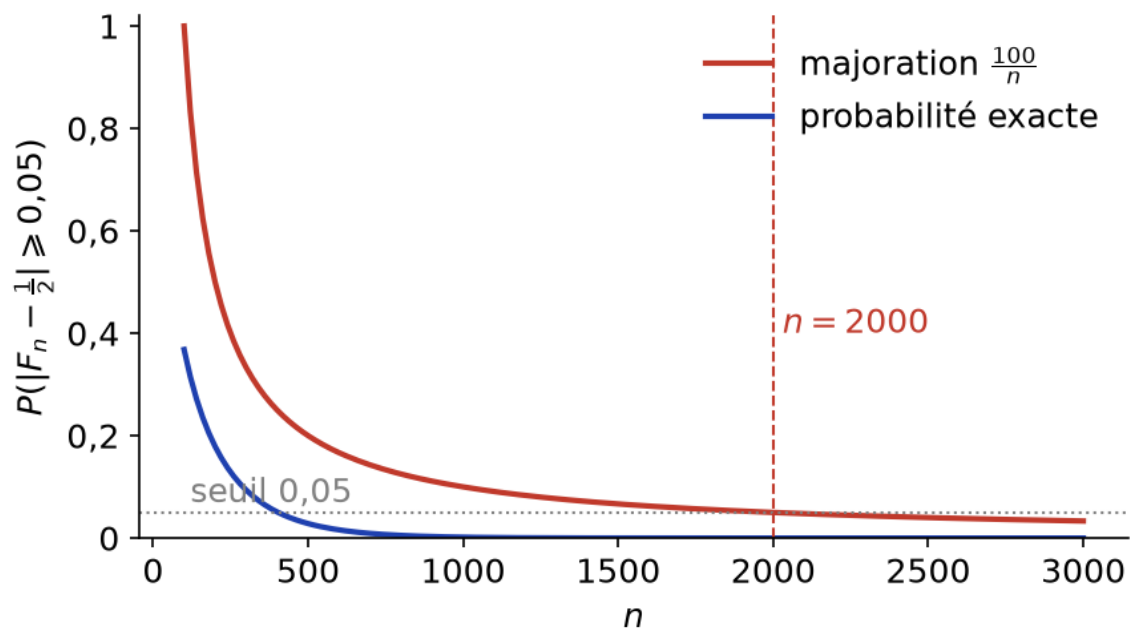
$P(X \geq 10) \leq \frac{9}{1,8^{10}} \approx \frac{9}{357,0}$. Cette majoration vaut environ 0,025 : c'est la meilleure des quatre, mais elle reste treize fois trop grande.

5. Soit $\theta \in]0, 1]$ et X valant a avec probabilité θ et 0 sinon. Alors $E(X) = a\theta$ et $P(X \geq a) = \theta$. Ainsi, $P(X \geq a) = \frac{E(X)}{a}$: l'inégalité de Markov ne peut pas être améliorée en général.

Point de méthode : plus la fonction croissante φ appliquée avant Markov croît vite, plus la majoration de $P(X \geq a)$ par $E(\varphi(X)) / \varphi(a)$ est fine, à condition que $E(\varphi(X))$ soit finie.

Corrigé de l'exercice 20 : Bienaymé-Tchebychev et nombre de lancers

- On a $F_n = \frac{S_n}{n}$, où $S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ compte les piles. **Donc** $E(F_n) = \frac{1}{2}$ et $V(F_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|F_n - \frac{1}{2}| \geq 0,05) \leq \frac{1}{4n \times 0,0025}$. **Cette borne vaut** $\frac{100}{n}$.
- On veut $P(|F_n - \frac{1}{2}| \geq 0,05) \leq 0,05$. Il suffit que $\frac{100}{n} \leq 0,05$. **Donc** $n = 2000$ **lancers suffisent**. Comme le montre la figure ci-dessous, la probabilité exacte passe sous 0,05 bien plus tôt, vers $n = 400$. La borne est sûre, mais pessimiste.



4. Soit F_n la fréquence observée. Alors $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$, car $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq \frac{1}{4n \times 0,0004} = \frac{625}{n}$. Pour $n = 12\,500$, la borne vaut $0,05$. **Donc l'erreur est inférieure à $0,02$ avec probabilité au moins $0,95$, quel que soit p .**

Corrigé de l'exercice 21 : Une loi faible des grands nombres sans indépendance

- La variable Y_k prend les valeurs 0 et 1 , et $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1)P(X_{k+1} = 1) = p^2$ par indépendance. **Donc** $Y_k \sim \mathcal{B}(p^2)$, $E(Y_k) = p^2$ **et** $V(Y_k) = p^2(1-p^2)$.
- On a $Y_k Y_{k+1} = X_k X_{k+1}^2 X_{k+2} = X_k X_{k+1} X_{k+2}$, car $X_{k+1}^2 = X_{k+1}$. Donc $E(Y_k Y_{k+1}) = p^3$. **Ainsi,** $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = p^3 - p^4$. Si $l \geq k+2$, Y_k est fonction de (X_k, X_{k+1}) et Y_l de (X_l, X_{l+1}) . Ces deux vecteurs portent sur des indices disjoints. D'après le lemme des coalitions, Y_k et Y_l sont indépendantes. **Donc leur covariance est nulle.**

3. Comme $p \in]0, 1[$, on a $p^3 - p^4 = p^3(1 - p) \neq 0$. **Les variables Y_k et Y_{k+1} ne sont donc pas indépendantes.** Dans la formule de la variance d'une somme, seuls les $n - 1$ couples $(k, k + 1)$ contribuent. Donc

$$V(S_n) = n p^2 (1 - p^2) + 2(n - 1)(p^3 - p^4).$$

En particulier, $V(S_n) \leq C n$, avec $C = p^2(1 - p^2) + 2p^3(1 - p)$.

4. Par linéarité, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = p^2$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{C}{n \varepsilon^2}.$$

Cette borne tend vers 0 : la fréquence des doubles succès converge en probabilité vers p^2 .

Point de méthode : la loi faible des grands nombres ne demande pas l'indépendance, mais seulement $V(S_n) = o(n^2)$; il suffit de contrôler les covariances.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème, le collectionneur de vignettes

1. Après avoir obtenu $k - 1$ vignettes distinctes, chaque paquet apporte une vignette nouvelle avec probabilité $\frac{N - k + 1}{N}$, indépendamment des autres paquets. Donc T_k est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. **Ainsi,** $T_k \sim \mathcal{G}\left(\frac{N - k + 1}{N}\right)$. De plus, les durées successives s'enchaînent sans recouvrement jusqu'à la N -ième vignette. **Donc** $T = T_1 + \dots + T_N$.

2. Par linéarité, $E(T) = \sum_{k=1}^N \frac{N}{N - k + 1}$. On pose $j = N - k + 1$, qui parcourt $\{1, \dots, N\}$. **Donc** $E(T) = N \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} = N H_N$.

3. D'après l'exercice 5, $V(T_k) = \frac{1-p_k}{p_k^2}$ avec $p_k = \frac{N-k+1}{N}$. Donc

$$V(T_k) = \frac{k-1}{N} \cdot \frac{N^2}{(N-k+1)^2} = \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}. \text{ Comme } k-1 \leq N, \text{ on a}$$

$$V(T_k) \leq \frac{N^2}{(N-k+1)^2}. \text{ Par indépendance, les variances s'ajoutent :}$$

$$V(T) \leq N^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2} \leq \frac{\pi^2}{6} N^2.$$

La majoration demandée est établie.

4. Pour $N = 6$, $E(T) = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 6 \times \frac{49}{20} = 14,7$. Ensuite,

$$V(T) = \sum_{k=1}^6 \frac{6(k-1)}{(7-k)^2} = 0 + \frac{6}{25} + \frac{12}{16} + \frac{18}{9} + \frac{24}{4} + \frac{30}{1}. \text{ Donc } E(T) = 14,7 \text{ et}$$

$$V(T) = 38,99, \text{ soit un écart type d'environ } 6,24.$$

5. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $j \geq 1$, $\frac{1}{j} \geq \int_j^{j+1} \frac{dt}{t}$. En

sommant, $H_N \geq \ln(N+1)$. Pour $j \geq 2$, $\frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^j \frac{dt}{t}$. En sommant de 2 à N ,

puis en ajoutant 1, **on obtient** $\ln(N+1) \leq H_N \leq 1 + \ln N$.

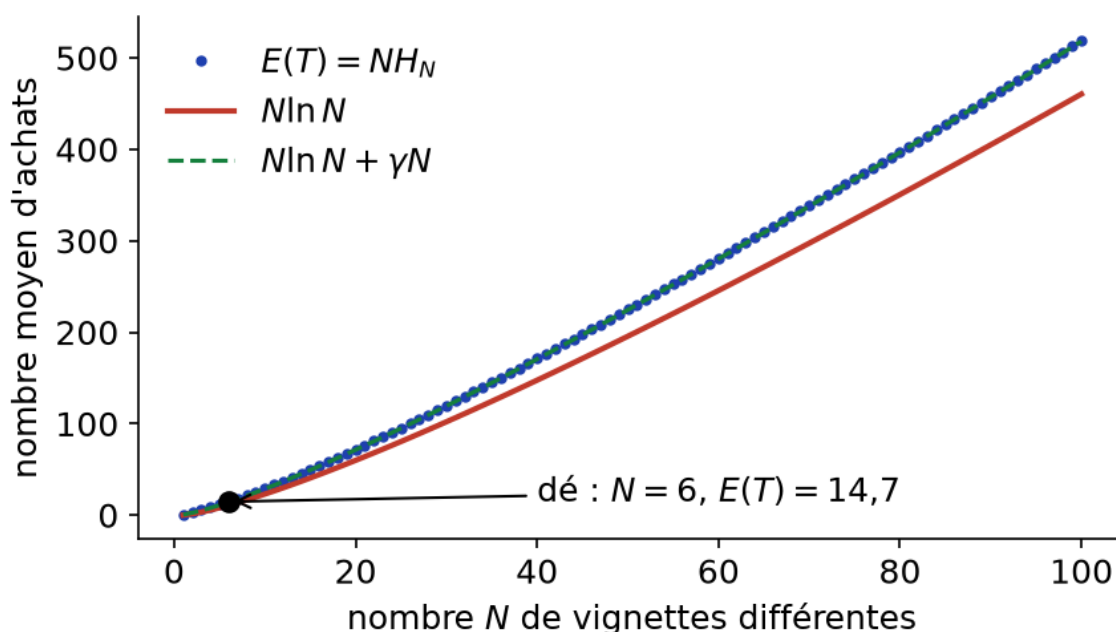
6. Posons $R_N = \frac{T}{N \ln N}$. Alors $E(R_N) = \frac{H_N}{\ln N}$, et la question 5 donne

$$1 \leq E(R_N) \leq 1 + \frac{1}{\ln N}. \text{ De plus, } V(R_N) \leq \frac{\pi^2}{6 \ln^2 N}. \text{ Pour } N \text{ assez grand,}$$

$\frac{1}{\ln N} < \frac{\epsilon}{2}$. Alors $|R_N - 1| \geq \epsilon$ entraîne $|R_N - E(R_N)| \geq \frac{\epsilon}{2}$. D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|R_N - 1| \geq \epsilon) \leq \frac{4 V(R_N)}{\epsilon^2} \leq \frac{2\pi^2}{3 \epsilon^2 \ln^2 N}.$$

Cette borne tend vers 0 : $\frac{T}{N \ln N}$ **converge en probabilité vers 1**. La figure ci-dessous compare $N H_N$ et $N \ln N$.



7. L'événement $\{T > n\}$ signifie qu'une vignette au moins manque après n achats. C'est la réunion des événements B_i : « la vignette i n'apparaît pas dans les n premiers paquets ». Par indépendance des paquets, $P(B_i) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$. La sous-additivité donne alors
- $$P(T > n) \leq N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$
- Pour le dé, $6 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{30} \approx 6 \times 0,00421$. **La probabilité qu'il faille plus de 30 lancers est donc inférieure à 0,026.**

Point de méthode : décomposer un temps d'attente en étapes géométriques indépendantes donne l'espérance par linéarité et la concentration par Bienaymé-Tchebychev.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [variables aléatoires discrètes, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur variables aléatoires discrètes](#)

- À maîtriser avant : [Espaces probabilisés et conditionnement](#), [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre précédent : [Espaces probabilisés et conditionnement](#)
- Chapitre suivant : [Suites et séries de fonctions](#)
- Le même thème en maths spé : [variables aléatoires discrètes](#), [exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)