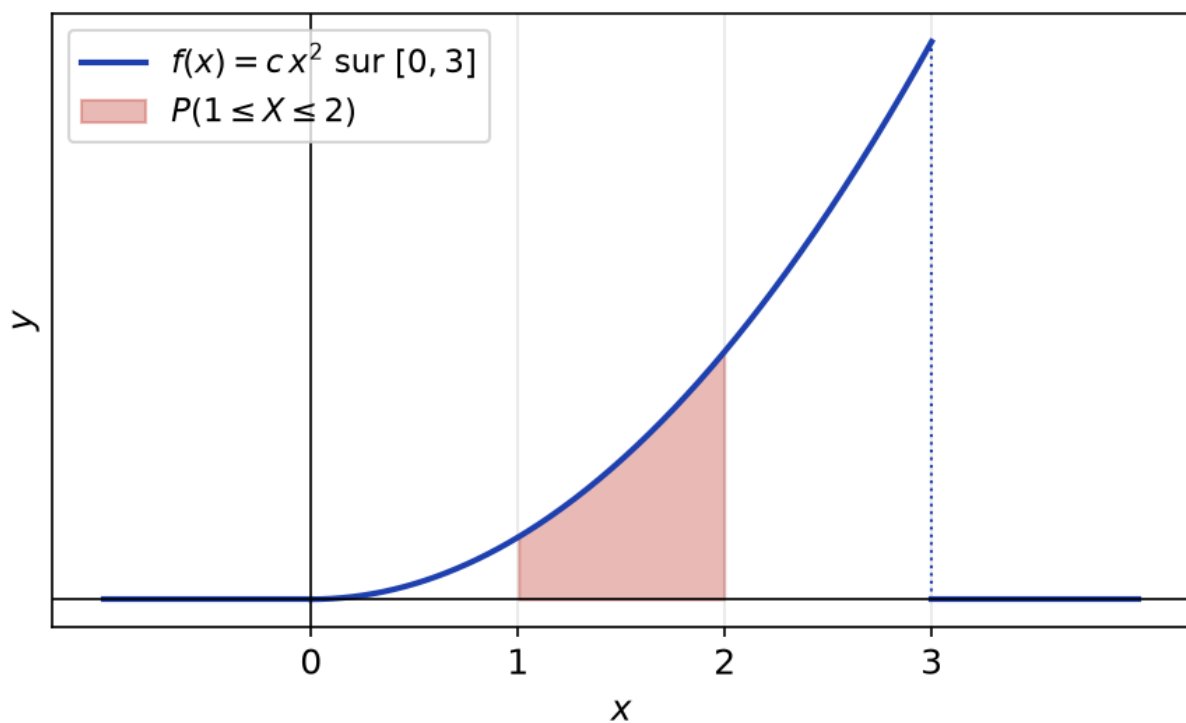


Variables aléatoires à densité

Exercice 1 : Détermination d'une constante et calcul de moments

Soit c un réel. On pose $f(x) = c x^2$ pour $x \in [0, 3]$ et $f(x) = 0$ sinon. La figure ci-dessous donne l'allure de f pour $c > 0$.



1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable de densité f . Déterminer sa fonction de répartition F_X .
3. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$ et $P(X > 2)$.
4. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ puis $V(X)$.

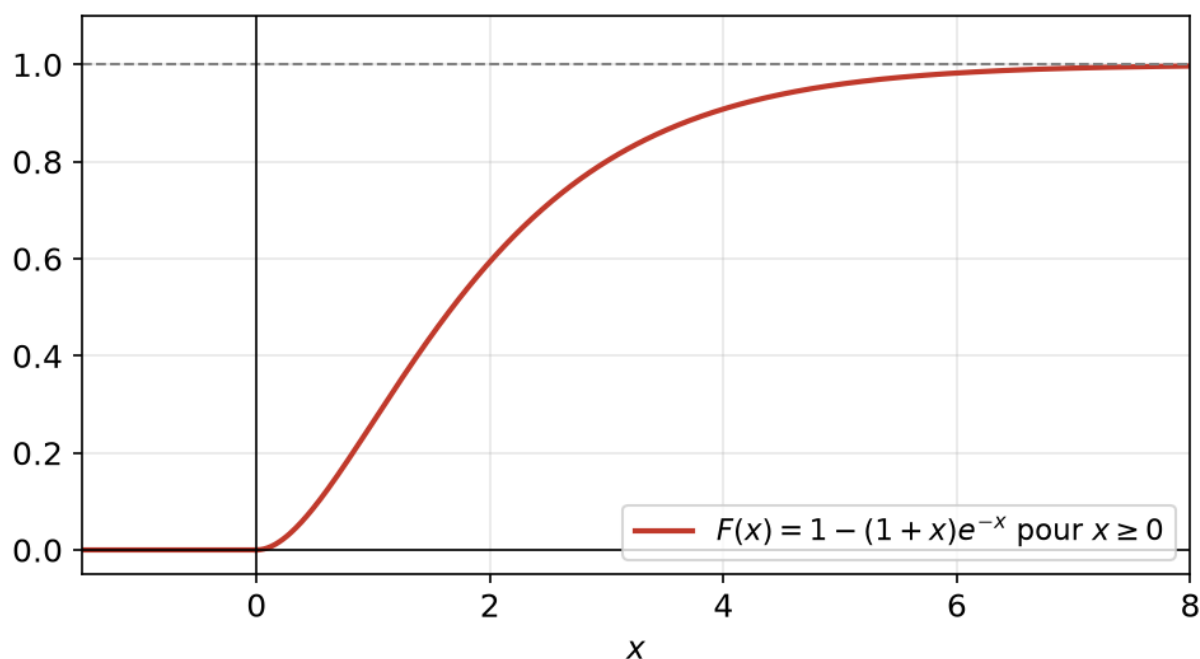
Exercice 2 : La loi de Cauchy

Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ pour tout réel x .

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X de densité f . Calculer sa fonction de répartition, puis $P(|X| \leq 1)$ et $P(X > \sqrt{3})$.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance.
4. Montrer que $1/X$ suit la même loi que X . On pourra calculer la fonction de répartition de $1/X$ en distinguant $y > 0$ et $y < 0$.

Exercice 3 : De la fonction de répartition à la densité

On considère la fonction F définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$ si $x \geq 0$. Son graphe est tracé ci-dessous.



1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X .
2. Montrer que X est à densité et en donner une densité f .
3. Calculer $P(X > 1)$ et $P(1 < X \leq 2)$.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 : Loi uniforme sur un segment

Soient $a < b$ deux réels et $X \sim \mathcal{U}([a,b])$.

1. Donner une densité et la fonction de répartition de X .
2. Démontrer que $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
3. Dans cette question, $a = -1$ et $b = 3$. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $P(X^2 \leq 1)$ et $P(|X - 1| > 1)$.

4. Toujours avec $a = -1$ et $b = 3$, déterminer la loi de $Y = \frac{X+1}{4}$.

Exercice 5 : Durée de vie sans mémoire

La durée de vie X , en années, d'un composant électronique suit une loi exponentielle. Sa durée de vie moyenne est de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi de X .
2. Calculer la probabilité que le composant fonctionne plus de 5 ans.
3. Le composant fonctionne depuis 3 ans. Calculer la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 5 ans de plus. Commenter.
4. Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire le réel m tel que $P(X \leq m) = 1/2$.
5. Calculer l'écart type de X .

Exercice 6 : Lecture de la table de la loi normale

On note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi(0,8) \approx 0,7881$, $\Phi(1) \approx 0,8413$, $\Phi(1,5) \approx 0,9332$, $\Phi(1,96) \approx 0,975$ et $\Phi(2) \approx 0,9772$. Soit $X \sim \mathcal{N}(10, 4)$.

1. Quelle est la loi de $Z = \frac{X-10}{2}$?
2. Calculer $P(X \leq 12)$ et $P(X \leq 7)$.
3. Calculer $P(8 \leq X \leq 12)$ et $P(X > 14)$.
4. Déterminer le réel $a > 0$ tel que $P(|X - 10| \leq a) = 0,95$.

Exercice 7 : Moments de la loi normale centrée réduite

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $m_k = E(Z^k)$ lorsqu'il existe.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Z^k admet une espérance.
2. Montrer que $m_k = 0$ pour k impair.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $m_{k+2} = (k+1) m_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. En déduire m_2 , m_4 , puis $m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$, puis calculer $E((X - m)^4)$.

Exercice 8 : Théorème de transfert et loi exponentielle

Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n admet une espérance et que $E(X^n) = n!$.
2. Pour quels réels α la variable $e^{\alpha X}$ admet-elle une espérance ? La calculer dans ce cas.
3. Calculer $E(\min(X, 1))$.
4. Calculer $E\left(\frac{1}{1 + e^X}\right)$ en posant $u = e^{-x}$.

Exercice 9 : Transformations affines et simulation par inversion

Soit X une variable de densité f .

1. Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Montrer que $Y = aX + b$ est à densité, de densité $y \rightarrow \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
2. Application : si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $c > 0$, déterminer la loi de cX .
3. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.
4. Plus généralement, soit F une fonction continue et strictement croissante d'un intervalle ouvert I sur $]0,1[$. Montrer que $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F sur I . Expliquer l'intérêt pour la simulation.

Exercice 10 : Carré d'une variable normale

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On note φ sa densité et Φ sa fonction de répartition.

1. Exprimer la fonction de répartition de $Y = Z^2$ à l'aide de Φ .
2. En déduire que Y est à densité et en donner une densité.
3. Calculer $E(Y)$ de deux façons : avec la densité de Y , puis par le théorème de transfert.
4. Déterminer une densité de $W = |Z|$ et calculer $E(W)$.

Exercice 11 : Loi de l'inverse par la fonction muette

Soit X de densité $f(x) = 2x$ sur $[0,1]$ et 0 ailleurs.

1. Vérifier que f est une densité.
2. À l'aide de la méthode de la fonction muette, déterminer une densité de $Y = 1/X$.
3. Retrouver ce résultat par la fonction de répartition de Y .
4. Calculer $E(Y)$ de deux façons.
5. La variable Y admet-elle une variance ?

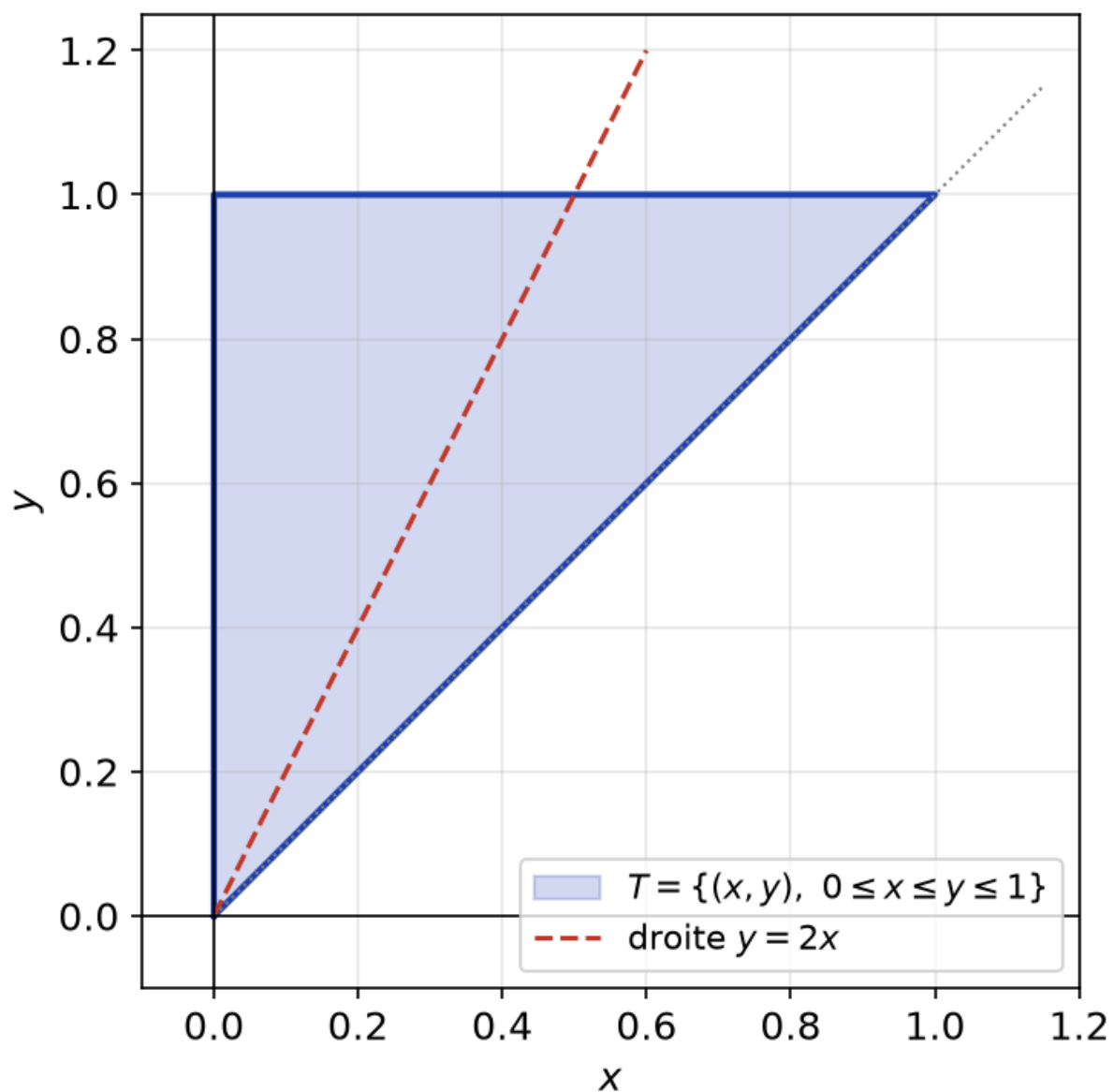
Exercice 12 : Couple de densité $x + y$

Soit (X,Y) un couple de densité $f(x,y) = c(x+y)$ sur $[0,1]^2$ et 0 ailleurs.

1. Déterminer c .
2. Calculer les densités marginales de X et de Y . Les variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\text{Cov}(X,Y)$.
4. Calculer $P(X + Y \leq 1)$ et $P(X \leq Y)$.

Exercice 13 : Couple uniforme sur un triangle

Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, représenté ci-dessous. Le couple (X,Y) a pour densité $f = 2$ sur T et 0 ailleurs.



1. Vérifier que f est une densité de couple.
2. Déterminer les densités marginales de X et de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ puis $\text{Cov}(X, Y)$.
5. Calculer $P(Y \leq 2X)$.

Exercice 14 : Somme de deux variables uniformes

Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer une densité de S par un produit de convolution.
2. Vérifier que la fonction obtenue est bien une densité.
3. Calculer $P(S \leq 1/2)$, $P(S > 3/2)$ et $P(1/2 \leq S \leq 3/2)$.
4. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ de deux façons.

Exercice 15 : Somme de variables exponentielles

Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Déterminer une densité de S_2 .
2. Montrer par récurrence que S_n a pour densité $f_n(s) = \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$ pour $s \geq 0$ et 0 sinon.
3. Calculer $E(S_n)$ avec cette densité et vérifier le résultat par linéarité.
4. On prend $\lambda = 1$. Calculer $P(S_2 \leq 1)$.
5. Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ indépendantes, avec $\lambda \neq \mu$. Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 16 : Somme de variables normales indépendantes

On note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$, avec $\Phi(0,8) \approx 0,7881$, $\Phi(1) \approx 0,8413$ et $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

1. Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer, par le produit de convolution, que $X + Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.
2. On admet désormais que la somme de deux normales indépendantes $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ suit $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Soient $X \sim \mathcal{N}(12, 9)$ et $Y \sim \mathcal{N}(8, 16)$ indépendantes. Calculer $P(X + Y > 25)$.
3. Déterminer la loi de $X - Y$, puis calculer $P(X > Y)$.
4. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Déterminer la loi de $\bar{X}_n$. Trouver le plus petit n tel que $P(|\bar{X}_n - m| \leq \sigma/10) \geq 0,95$.

Exercice 17 : Approximation normale d'un lancer de pièces

On lance 400 fois une pièce équilibrée et on note S le nombre de piles obtenus. On donne $\Phi(1,05) \approx 0,8531$, $\Phi(1,95) \approx 0,9744$ et $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

1. Donner la loi de S , son espérance et son écart type.
2. Justifier l'approximation de la loi de S par une loi normale que l'on précisera.
3. Avec correction de continuité, donner une valeur approchée de $P(190 \leq S \leq 210)$.
4. Donner une valeur approchée de $P(S \geq 220)$.
5. Déterminer le plus petit entier c tel que, selon l'approximation corrigée, $P(200 - c \leq S \leq 200 + c) \geq 0,95$.

Exercice 18 : Minimum et maximum de variables indépendantes

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. Déterminer la loi de $m = \min(X_1, \dots, X_n)$.
2. Pour $n = 2$, calculer $P(X_1 < X_2)$ à l'aide de la densité du couple.
3. Soient $U_1, \dots, U_n$ indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et $M = \max(U_1, \dots, U_n)$. Déterminer la fonction de répartition et une densité de M .
4. Calculer $E(M)$ et $V(M)$.
5. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(n(1 - M) > t)$ tend vers e^{-t} quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter.

Exercice 19 : Intégrale de Gauss et loi de Rayleigh

Pour $R > 0$, on note $C_R = [0, R]^2$ et $D_R = \left\{ \begin{array}{l} (x, y), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{array} \right\}$.

1. Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$.
2. Calculer $J(R) = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ en coordonnées polaires.
3. Montrer que $J(R) \leq \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \leq J(R\sqrt{2})$. En déduire I , puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

4. Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Montrer que $P(R \leq r) = 1 - e^{-r^2/2}$ pour $r \geq 0$.
5. En déduire une densité de R , la loi de R^2 , puis $E(R)$.

Exercice 20 : Queue de la loi normale

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité φ et de fonction de répartition Φ . On rappelle que $\varphi'(t) = -t \varphi(t)$.

- Montrer que, pour tout $x > 0$, $1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$.
- Par une intégration par parties, montrer que $1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$.
- En déduire que $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$ pour $x > 0$.
- En déduire un équivalent de $1 - \Phi(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- On donne $\varphi(3) \approx 0,00443$. Encadrer $P(Z > 3)$, puis majorer $P(|Z| > 3)$. Comparer avec la majoration fournie par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 21 : Problème : de la loi géométrique à la loi exponentielle

Ce problème relie les lois discrètes et les lois à densité. On fixe $\lambda > 0$.

Partie A. Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $N = \lfloor X \rfloor + 1$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

1. Montrer que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre p .
2. Rappeler $E(N)$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{e^\lambda - 1}$.
3. À l'aide de l'encadrement $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$, en déduire que $\frac{1}{\lambda} - 1 \leq \frac{1}{e^\lambda - 1} \leq \frac{1}{\lambda}$.
4. Montrer que, pour tous entiers $k, m \geq 0$, $P(N > k + m \mid N > k) = P(N > m)$. Quel est l'analogue pour X ?

Partie B. Pour tout entier $n > \lambda$, soit T_n une variable de loi géométrique de paramètre $p_n = \lambda / n$, et $Y_n = T_n / n$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(T_n > k)$.
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $P(Y_n > t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}$.
3. En déduire que $P(Y_n > t) \rightarrow e^{-\lambda t}$ quand $n \rightarrow +\infty$, puis que $F_{Y_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ pour tout réel t .
4. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$, puis leurs limites. Comparer avec $E(X)$ et $V(X)$.
5. Interpréter : que modélisent T_n et Y_n si l'on découpe le temps en intervalles de durée $1/n$?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [variables aléatoires à densité, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Variables aléatoires discrètes](#), [Intégrales généralisées](#), [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Chapitre suivant : [Géométrie affine](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)