

Variables aléatoires à densité

Corrigé de l'exercice 1 : Détermination d'une constante et calcul de moments

1. La fonction f est continue sauf en 3 , et elle est positive si et seulement si $c \geq 0$. De plus, elle est nulle hors de $[0,3]$, donc son intégrale converge et vaut $\int_0^3 c x^2 dx = c \cdot \frac{27}{3} = 9c$.
Ainsi, f est une densité si et seulement si $c = 1/9$.

2. Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Pour $0 \leq x \leq 3$, $F_X(x) = \int_0^x \frac{t^2}{9} dt = \frac{x^3}{27}$. Enfin, pour $x > 3$, $F_X(x) = 1$. Donc $F_X(x) = x^3/27$ sur $[0,3]$, 0 avant et 1 après.

3. On a $P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{8-1}{27}$, soit $P(1 \leq X \leq 2) = 7/27$. De même, $P(X > 2) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

4. La densité est nulle hors d'un segment, donc tous les moments existent. D'abord,

$$E(X) = \int_0^3 \frac{x^3}{9} dx = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}. \text{ Ensuite, } E(X^2) = \int_0^3 \frac{x^4}{9} dx = \frac{243}{45} = \frac{27}{5}. \text{ Par la}$$

formule de König-Huygens,

$$V(X) = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{432 - 405}{80} = \frac{27}{80}.$$

Ainsi, $E(X) = 9/4$ et $V(X) = 27/80$.

Corrigé de l'exercice 2 : La loi de Cauchy

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive si $c \geq 0$. Pour $A, B > 0$,

$$\int_{-A}^B \frac{dt}{1+t^2} = \arctan B + \arctan A, \text{ qui tend vers } \pi. \text{ L'intégrale converge donc et vaut } c\pi. \text{ Par conséquent, } c = 1/\pi.$$

2. Pour tout réel x , $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{\pi}$. Ainsi,

$$P(|X| \leq 1) = F_X(1) - F_X(-1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ d'où } P(|X| \leq 1) = 1/2. \text{ De plus, } P(X > \sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}, \text{ soit } P(X > \sqrt{3}) = 1/6.$$

3. La fonction $t \rightarrow \frac{|t|}{\pi(1+t^2)}$ est positive et équivalente à $\frac{1}{\pi t}$ en $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

Par le critère de comparaison des fonctions positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t) dt$ diverge. Donc X

n'admet pas d'espérance.

4. L'événement $\{X = 0\}$ est de probabilité nulle, donc $Y = 1/X$ est définie presque sûrement. Soit $y > 0$. Alors $1/X \leq y$ équivaut à $X < 0$ ou $X \geq 1/y$. Ainsi,

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + 1 - F_X(1/y) = 1 - \frac{\arctan(1/y)}{\pi}. \text{ Or } \arctan(1/y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y \text{ pour } y > 0, \text{ donc } F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan y}{\pi}.$$

$$\text{Soit maintenant } y < 0. \text{ Alors } 1/X \leq y \text{ équivaut à } 1/y \leq X < 0, \text{ donc } F_Y(y) = \frac{1}{2} - F_X(1/y) = -\frac{\arctan(1/y)}{\pi}. \text{ Pour } y < 0, \text{ on a } \arctan(1/y) = -\frac{\pi}{2} - \arctan y, \text{ d'où encore } F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan y}{\pi}.$$

Enfin, $F_Y(0) = P(X < 0) = 1/2$. Les deux fonctions de répartition coïncident, donc $1/X$ **suit la loi de Cauchy.**

Point de méthode : une densité paire ne suffit pas pour avoir $E(X) = 0$; il faut d'abord établir la convergence absolue.

Corrigé de l'exercice 3 : De la fonction de répartition à la densité

1. D'abord, F est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et $F(0) = 1 - 1 = 0$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour $x > 0$, $F'(x) = e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x}$, c'est-à-dire $F'(x) = x e^{-x} \geq 0$. Ainsi, F est croissante. Enfin, F vaut 0 en $-\infty$ et $(1+x)e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ par croissances comparées. Une fonction croissante, continue à droite, de limites 0 et 1, est la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Donc **F est une fonction de répartition.**

2. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0. Par le critère du cours, X est à densité, et $f(x) = x e^{-x}$ pour $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon, en est une densité.

3. On a $P(X > 1) = 1 - F(1) = 2e^{-1}$, donc $P(X > 1) = 2/e \approx 0,736$. De plus, $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = (1 - 3e^{-2}) - (1 - 2e^{-1})$, soit $P(1 < X \leq 2) = \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2} \approx 0,330$.

4. Rappelons que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, résultat démontré à l'exercice 8. Les intégrales

convergent donc, et $E(X) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$. De même,

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 6. \text{ Par conséquent, } E(X) = 2 \text{ et } V(X) = 6 - 4 = 2.$$

Corrigé de l'exercice 4 : Loi uniforme sur un segment

1. Une densité est $f = \frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$ et 0 ailleurs. Par intégration, $F_X(x) = 0$ si $x < a$, $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$, et $F_X(x) = 1$ si $x > b$.

2. La densité est bornée à support dans un segment, donc les moments existent. D'une part,

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}. \text{ D'autre part, } E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \text{ Ainsi,}$$

$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

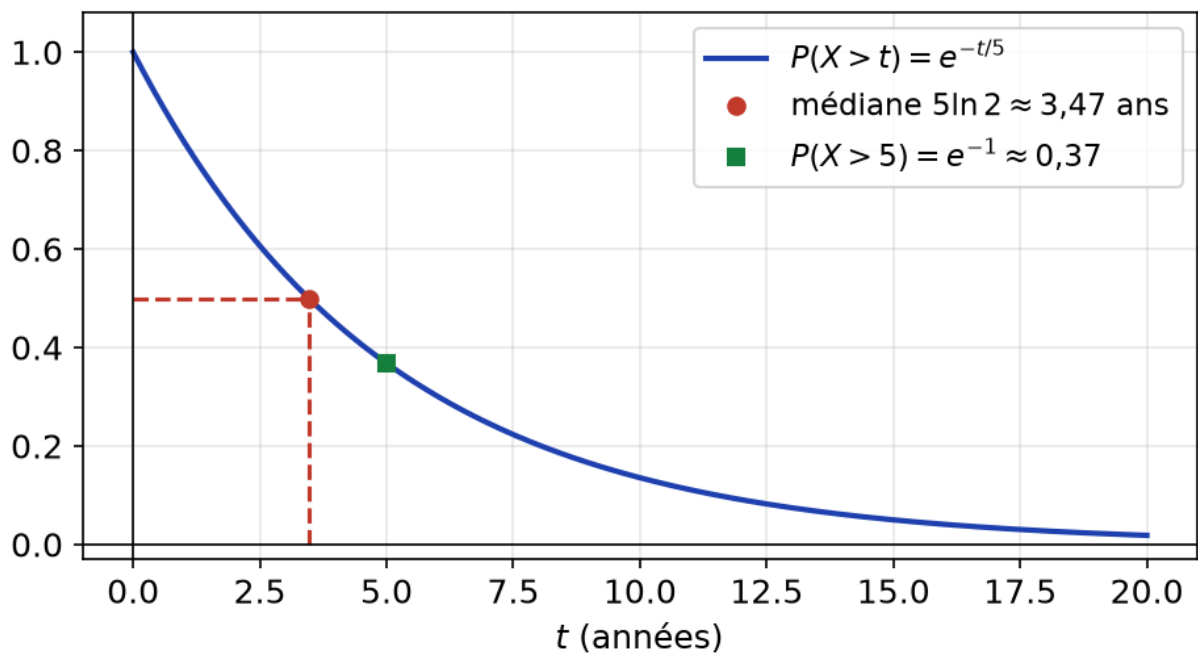
On obtient bien $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3. Avec $a = -1$ et $b = 3$, on trouve $E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$. Ensuite, $X^2 \leq 1$ équivaut à $-1 \leq X \leq 1$, intervalle de longueur 2 dans $[-1, 3]$. Donc $P(X^2 \leq 1) = 2/4 = 1/2$. Enfin, $|X - 1| > 1$ équivaut à $X < 0$ ou $X > 2$, d'où $P(|X - 1| > 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. En résumé, $E(X) = 1$, $V(X) = 4/3$, $P(X^2 \leq 1) = 1/2$ et $P(|X - 1| > 1) = 1/2$.

4. Pour $y \in [0, 1]$, $P(Y \leq y) = P(X \leq 4y - 1) = \frac{4y - 1 + 1}{4} = y$. De plus, Y est à valeurs dans $[0, 1]$. Donc $Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Corrigé de l'exercice 5 : Durée de vie sans mémoire

1. Pour $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a $E(X) = 1/\lambda$. Comme $E(X) = 5$, on obtient $\lambda = 1/5 = 0,2$.
2. La fonction de survie vaut $P(X > t) = e^{-t/5}$ pour $t \geq 0$. Donc $P(X > 5) = e^{-1} \approx 0,368$.
3. On cherche $P(X > 8 | X > 3)$. Comme $\{X > 8\} \subset \{X > 3\}$, ce quotient vaut $\frac{e^{-8/5}}{e^{-3/5}} = e^{-1}$. Ainsi, $P(X > 8 | X > 3) = e^{-1} \approx 0,368$. C'est exactement la probabilité qu'un composant neuf dure plus de 5 ans : le composant ne vieillit pas. C'est la propriété d'absence de mémoire.
4. On résout $1 - e^{-m/5} = 1/2$, soit $e^{-m/5} = 1/2$. Donc $m = 5 \ln 2 \approx 3,47$ ans. La médiane est inférieure à la moyenne, car la loi a une longue queue à droite. La figure ci-dessous représente la fonction de survie avec ces deux points remarquables.



5. On a $V(X) = 1/\lambda^2 = 25$, donc **l'écart type vaut 5 ans**, comme l'espérance.

Corrigé de l'exercice 6 : Lecture de la table de la loi normale

1. Ici $m = 10$ et $\sigma = 2$. Par le cours, $Z = \frac{X-10}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. D'abord, $P(X \leq 12) = P(Z \leq 1) = \Phi(1)$, soit $P(X \leq 12) \approx 0,8413$. Ensuite, $P(X \leq 7) = P(Z \leq -1,5) = 1 - \Phi(1,5)$, donc $P(X \leq 7) \approx 0,0668$.
3. On a $P(8 \leq X \leq 12) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2\Phi(1) - 1$, d'où $P(8 \leq X \leq 12) \approx 0,6826$. De même, $P(X > 14) = P(Z > 2) = 1 - \Phi(2)$, donc $P(X > 14) \approx 0,0228$.
4. On a $P(|X - 10| \leq a) = P(|Z| \leq a/2) = 2\Phi(a/2) - 1$. Cette quantité vaut 0,95 si et seulement si $\Phi(a/2) = 0,975$, soit $a/2 = 1,96$ car Φ est strictement croissante. Ainsi, $a \approx 3,92$.

Corrigé de l'exercice 7 : Moments de la loi normale centrée réduite

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, $t^2 \cdot |t|^k e^{-t^2/2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$. Donc

$$|t|^k \varphi(t) = o(1/t^2) \text{ en } \pm\infty. \text{ Or } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge. Par comparaison, } \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^k \varphi(t) dt$$

converge, et le théorème de transfert montre que Z^k admet une espérance.

2. Pour k impair, la fonction $t \rightarrow t^k \varphi(t)$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. Son intégrale sur $[-A, A]$ est nulle pour tout A , donc $m_k = 0$.

3. Soit $A > 0$. On intègre par parties avec $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -\varphi(t)$, de sorte que $v'(t) = t\varphi(t)$:

$$\int_{-A}^A t^{k+2} \varphi(t) dt = \left[-t^{k+1} \varphi(t) \right]_{-A}^A + (k+1) \int_{-A}^A t^k \varphi(t) dt.$$

Le crochet tend vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$. On obtient donc $m_{k+2} = (k+1) m_k$.

4. On a $m_0 = 1$. Donc $m_2 = 1 \cdot m_0 = 1$ et $m_4 = 3 m_2 = 3$. Montrons ensuite par récurrence la formule $m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Elle est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang n , alors

$$m_{2n+2} = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Ainsi, $m_2 = 1$, $m_4 = 3$ et $m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

5. On écrit $X = m + \sigma Z$. Par linéarité, $E(X) = m + \sigma \cdot 0 = m$, et $V(X) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2 m_2 = \sigma^2$. Enfin, $E((X-m)^4) = \sigma^4 m_4$. Donc $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$ et $E((X-m)^4) = 3\sigma^4$.

Corrigé de l'exercice 8 : Théorème de transfert et loi

exponentielle

1. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Cette intégrale converge, car $x^n e^{-x} = o(1/x^2)$ en $+\infty$. D'abord, $I_0 = 1$. Ensuite, pour $A > 0$, une intégration par parties donne $\int_0^A x^{n+1} e^{-x} dx = -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-x} dx$. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $I_{n+1} = (n+1) I_n$. Par récurrence et par le théorème de transfert, $E(X^n) = I_n = n!$.

2. Par le théorème de transfert, e^{aX} admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{(a-1)x} dx$ converge, c'est-à-dire si $a < 1$. Dans ce cas, $E(e^{aX}) = \frac{1}{1-a}$ pour $a < 1$, et il n'y a pas d'espérance si $a \geq 1$.

3. La fonction $g(x) = \min(x, 1)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Donc

$$E(g(X)) = \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 + e^{-1} = 1 - 2e^{-1} + e^{-1}.$$

Ainsi, $E(\min(X, 1)) = 1 - 1/e \approx 0,632$.

4. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+e^x}$ est continue et bornée, donc l'espérance existe et vaut

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} dx$. Le changement de variable $u = e^{-x}$, de classe C^1 et bijectif, donne $du = -e^{-x} dx$ et $e^x = 1/u$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{du}{1+1/u} = \int_0^1 \frac{u}{1+u} du = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = 1 - \ln 2.$$

Donc $E\left(\frac{1}{1+e^X}\right) = 1 - \ln 2 \approx 0,307$.

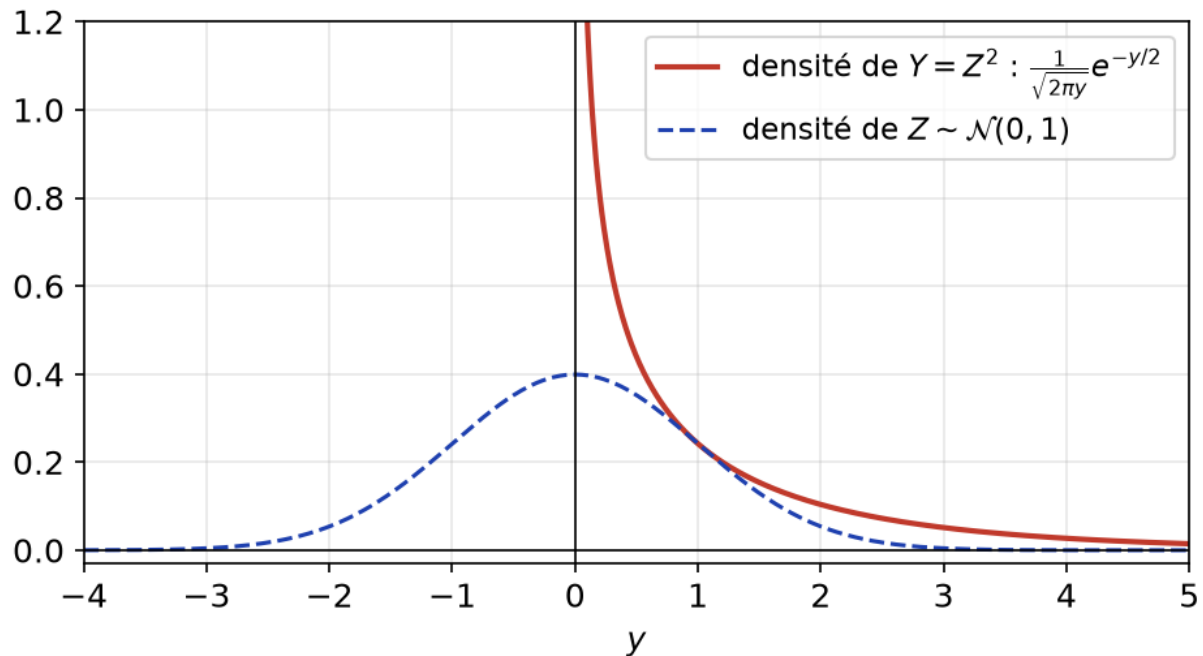
Corrigé de l'exercice 9 : Transformations affines et simulation par inversion

- Supposons d'abord $a > 0$. Alors $F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{(y-b)/a} f(t) dt$. Le changement de variable $t = (u-b)/a$ donne $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{a} f\left(\frac{u-b}{a}\right) du$. Si $a < 0$, l'inégalité change de sens : $F_Y(y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right)$, et le même changement de variable fait apparaître $-\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}$. Dans les deux cas, Y a pour densité $y \rightarrow \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
- Avec $a = c$ et $b = 0$, cX a pour densité $\frac{1}{c}\lambda e^{-\lambda y/c}$ pour $y \geq 0$. C'est la densité de $\mathcal{E}(\lambda/c)$. Donc $cX \sim \mathcal{E}(\lambda/c)$.
- La variable $1 - U$ est à valeurs dans $]0,1]$ presque sûrement, donc $Y \geq 0$. Pour $y \geq 0$, $Y \leq y$ équivaut à $1 - U \geq e^{-\lambda y}$, soit $U \leq 1 - e^{-\lambda y}$. Ainsi, $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$. Par conséquent, $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- La fonction F est une bijection continue strictement croissante de I sur $]0,1[$, donc F^{-1} est aussi strictement croissante. Comme $P(U \in]0,1[) = 1$, la variable $F^{-1}(U)$ est bien définie. Pour $x \in I$, on a alors $F^{-1}(U) \leq x$ si et seulement si $U \leq F(x)$. Donc $P(F^{-1}(U) \leq x) = F(x)$. Ainsi, $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F . Autrement dit, un générateur uniforme suffit pour simuler toute loi dont on sait inverser la fonction de répartition. La question 3 en est le cas $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Carré d'une variable normale

- Pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$, car $Y \geq 0$. Pour $y \geq 0$, on a $Z^2 \leq y$ si et seulement si $-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}$. Donc $F_Y(y) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$ pour $y \geq 0$.
- La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, car $2\Phi(0) - 1 = 0$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par le critère du cours, Y est à densité, et pour $y > 0$, $F'_Y(y) = 2\varphi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Ainsi, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$ pour $y > 0$, et 0 sinon. La figure ci-dessous compare cette densité, non bornée en 0, à celle de Z .



3. Avec la densité, $E(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y/2} dy$. Le changement de variable $y = t^2$,
 $dy = 2t dt$, donne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2/2} dt$. Une intégration par parties avec
 $(-e^{-t^2/2})' = t e^{-t^2/2}$ donne ensuite $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
 Donc $E(Y) = 1$. Par le théorème de transfert, on retrouve directement
 $E(Y) = E(Z^2) = V(Z) = 1$. Dans les deux cas, $E(Y) = 1$.

4. Pour $w \geq 0$, $P(|Z| \leq w) = 2\Phi(w) - 1$, et cette probabilité est nulle pour $w < 0$. En dérivant, W a pour densité $2\varphi(w)$ sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite,
 $E(W) = \int_0^{+\infty} \frac{2w}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} [-e^{-w^2/2}]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Ainsi,
 $E(|Z|) = \sqrt{2/\pi} \approx 0,798$.

Corrigé de l'exercice 11 : Loi de l'inverse par la fonction muette

1. La fonction f est positive, continue sauf en 1 , et $\int_0^1 2x \, dx = 1$. C'est donc bien **une densité**.

2. Soit h continue et bornée sur $[1, +\infty[$. La variable X est non nulle presque sûrement. Par le théorème de transfert, $E(h(Y)) = \int_0^1 h(1/x) 2x \, dx$. Le changement de variable $y = 1/x$, bijection C^1 de $]0,1]$ sur $[1, +\infty[$, donne $dx = -dy/y^2$. On obtient

$$E(h(Y)) = \int_1^{+\infty} h(y) \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{y^2} \, dy = \int_1^{+\infty} h(y) \frac{2}{y^3} \, dy.$$

Par la méthode de la fonction muette, Y a pour densité $f_Y(y) = 2/y^3$ sur $[1, +\infty[$, et 0 ailleurs.

3. Pour $y \geq 1$, $P(Y \leq y) = P(X \geq 1/y) = 1 - \frac{1}{y^2}$, et $F_Y(y) = 0$ pour $y < 1$. En dérivant, on retrouve $f_Y(y) = 2/y^3$ pour $y > 1$.

4. D'une part, $E(Y) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{y^2} \, dy = 2$. D'autre part, le théorème de transfert donne

$$E(1/X) = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot 2x \, dx = 2. \text{ Ainsi, } E(Y) = 2.$$

5. Par transfert, $E(Y^2) = \int_1^{+\infty} y^2 \cdot \frac{2}{y^3} \, dy = \int_1^{+\infty} \frac{2}{y} \, dy$, qui diverge. Donc Y **n'admet pas de variance**, bien qu'elle admette une espérance.

Corrigé de l'exercice 12 : Couple de densité $x + y$

1. On a $\iint_{[0,1]^2} (x+y) dx dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Comme $f \geq 0$ impose $c \geq 0$, on obtient $c = 1$.

2. Pour $x \in [0,1]$, $f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2}$. Par symétrie, $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$ sur $[0,1]$. Or $f_X(x) f_Y(y) = xy + \frac{x+y}{2} + \frac{1}{4}$, qui diffère de $x + y$: par exemple, en $(0,0)$, on trouve $1/4 \neq 0$. Donc **X et Y ne sont pas indépendantes.**

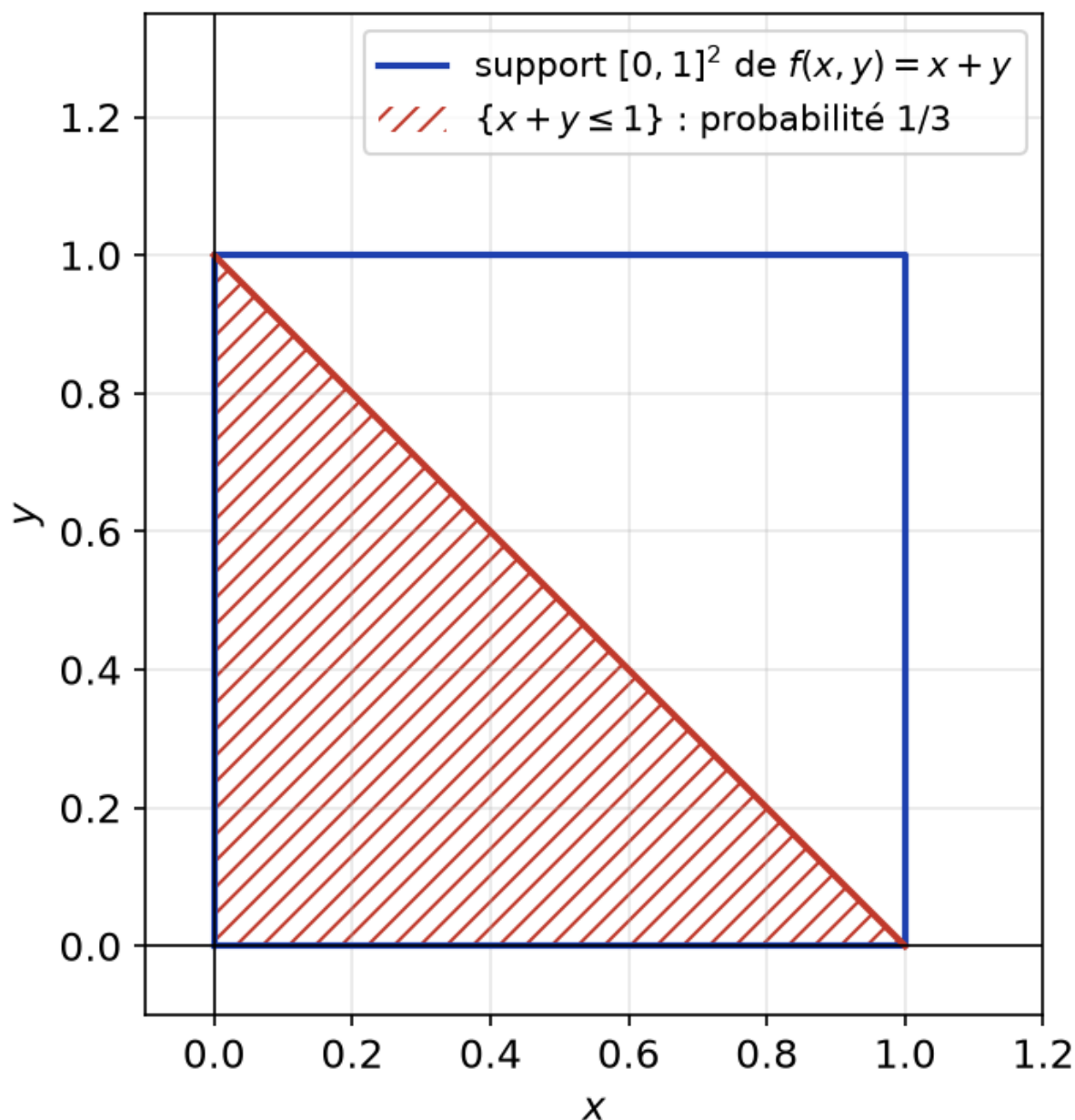
3. D'abord, $E(X) = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Ensuite, $E(X^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$, d'où $V(X) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$. Enfin, par transfert, $E(XY) = \iint xy(x+y) dx dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Ainsi, $\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$. En résumé, $E(X) = 7/12$, $V(X) = 11/144$ et $\text{Cov}(X,Y) = -1/144$.

4. Le domaine $\{x + y \leq 1\}$ coupe le carré selon le triangle hachuré ci-dessous. Par le théorème de Fubini,

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{3}.$$

Ensuite, $f(x,y) = f(y,x)$, donc (X,Y) et (Y,X) ont même loi. Ainsi,

$P(X \leq Y) = P(Y \leq X)$. Or la somme vaut $1 + P(X = Y) = 1$, car la diagonale est d'aire nulle. Donc $P(X + Y \leq 1) = 1/3$ et $P(X \leq Y) = 1/2$.



Corrigé de l'exercice 13 : Couple uniforme sur un triangle

1. La fonction f est positive, et l'aire de T vaut $1/2$. Donc $\iint f = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, et f est une densité de couple.

2. Pour $x \in [0, 1]$, $f_X(x) = \int_x^1 2 dy = 2(1-x)$. Pour $y \in [0, 1]$,

$f_Y(y) = \int_0^y 2 dx = 2y$. Ainsi, $f_X(x) = 2(1-x)$ et $f_Y(y) = 2y$ sur $[0,1]$, et 0 ailleurs.

3. Le produit $f_X(x) f_Y(y) = 4y(1-x)$ est non nul en $(0,8; 0,2)$, par exemple, alors que ce point n'est pas dans T . Plus rigoureusement, $P(X > 1/2, Y < 1/2) = 0$, puisque $X \leq Y$, tandis que $P(X > 1/2) P(Y < 1/2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \neq 0$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On calcule $E(X) = \int_0^1 2x(1-x) dx = \frac{1}{3}$ et $E(Y) = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$. Ensuite,
- $$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 2xy dx dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4}. \text{ Donc } \text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}.$$

5. L'événement $\{Y \leq 2X\}$ correspond, dans T , à $y/2 \leq x \leq y$. Pour y fixé, cet intervalle a pour longueur $y/2$. Donc $P(Y \leq 2X) = \int_0^1 2 \cdot \frac{y}{2} dy$, c'est-à-dire
- $$P(Y \leq 2X) = 1/2.$$

Point de méthode : ce couple est la loi de $(\min(U,V), \max(U,V))$ pour U, V indépendantes uniformes sur $[0,1]$; on retrouve ainsi $E(\max) = 2/3$.

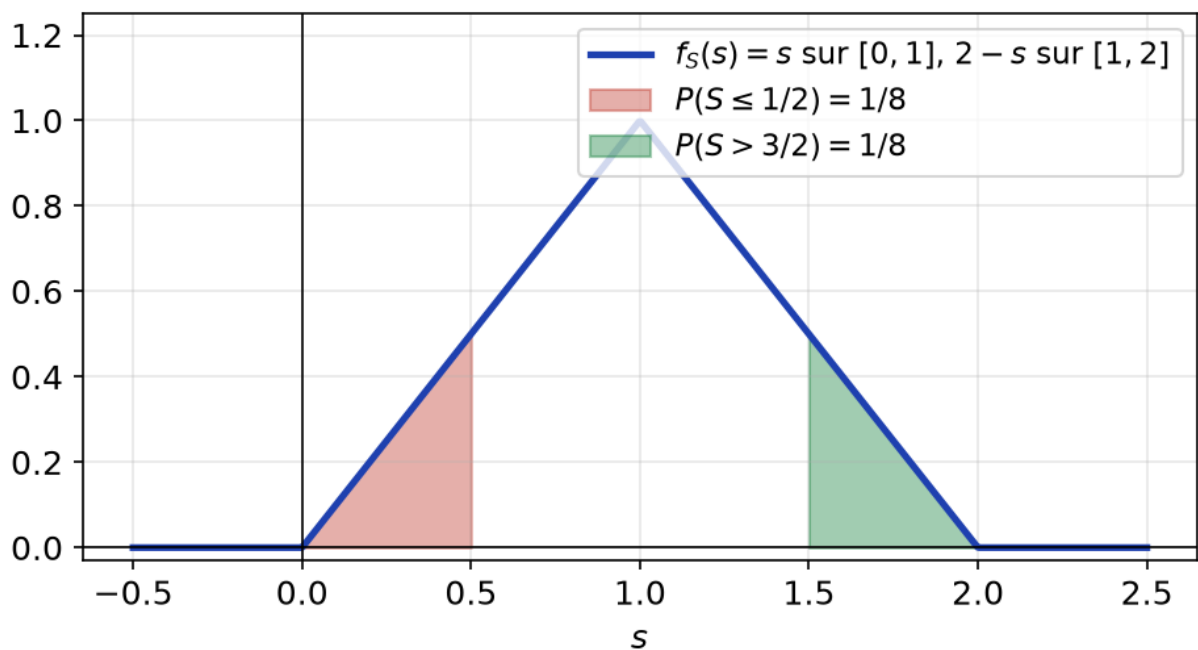
Corrigé de l'exercice 14 : Somme de deux variables uniformes

1. Les variables sont indépendantes et leurs densités bornées. Par le théorème de convolution,

$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(s-x) dx$. L'intégrande vaut 1 si $0 \leq x \leq 1$ et $s-1 \leq x \leq s$, et 0 sinon. Donc $f_S(s)$ est la longueur de $[\max(0, s-1), \min(1, s)]$. Si $0 \leq s \leq 1$, cette longueur vaut s . Si $1 \leq s \leq 2$, elle vaut $1 - (s-1) = 2 - s$. Sinon, l'intervalle est vide. Ainsi, $f_S(s) = s$ sur $[0,1]$, $f_S(s) = 2 - s$ sur $[1,2]$, et 0 ailleurs.

2. La fonction est positive et continue. De plus, son intégrale est l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 1, soit 1. C'est donc **bien une densité**.

3. On a $P(S \leq 1/2) = \int_0^{1/2} s \, ds = \frac{1}{8}$. Par symétrie de la densité autour de 1, $P(S > 3/2) = \frac{1}{8}$. Par passage au complémentaire, $P(S \leq 1/2) = P(S > 3/2) = 1/8$ et $P(1/2 \leq S \leq 3/2) = 3/4$. La figure ci-dessous montre les deux petits triangles d'aire $1/8$.



4. Par linéarité, $E(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Par indépendance, $V(S) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Vérifions avec la densité. D'abord, $E(S) = \int_0^1 s^2 \, ds + \int_1^2 s(2-s) \, ds = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Ensuite, $E(S^2) = \int_0^1 s^3 \, ds + \int_1^2 s^2(2-s) \, ds = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = \frac{7}{6}$. Donc $V(S) = \frac{7}{6} - 1$. On retrouve $E(S) = 1$ et $V(S) = 1/6$.

Corrigé de l'exercice 15 : Somme de variables exponentielles

1. Les densités sont bornées et les variables indépendantes. Pour $s < 0$, l'intégrande de la convolution est nul. Pour $s \geq 0$, il est non nul seulement si $0 \leq x \leq s$. Ainsi,

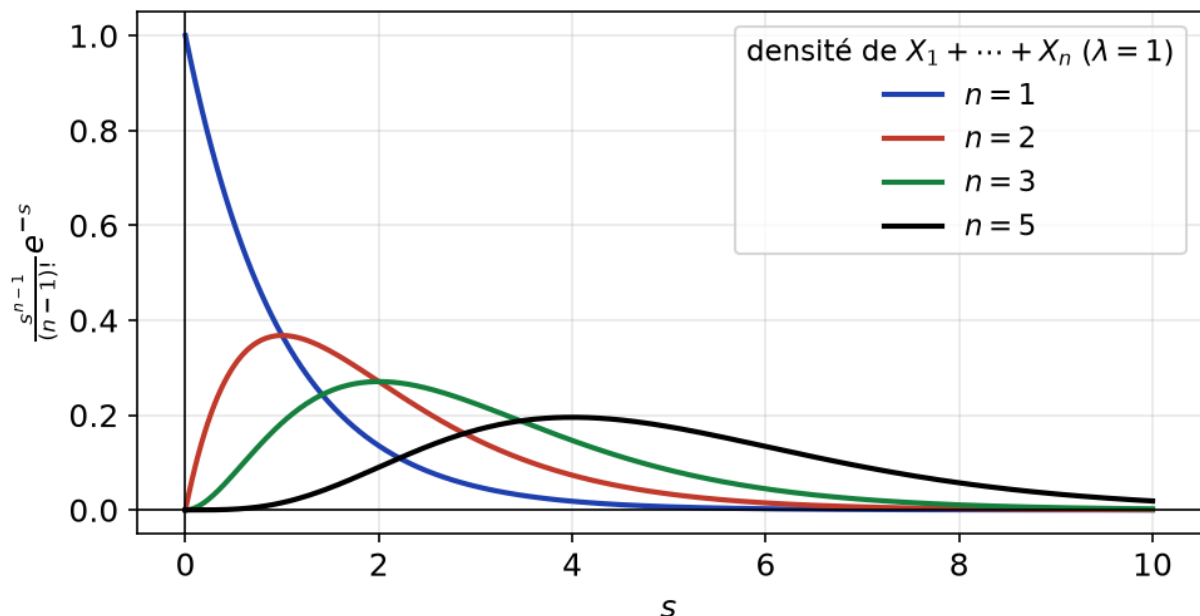
$$f_{S_2}(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(s-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s dx = \lambda^2 s e^{-\lambda s}.$$

Donc S_2 a pour densité $\lambda^2 s e^{-\lambda s}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. La formule est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang n . Comme X_{n+1} est indépendante de S_n , qui ne dépend que de $X_1, \dots, X_n$, on a pour $s \geq 0$

$$f_{n+1}(s) = \int_0^s \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(s-x)} dx = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s} \frac{s^n}{n!}.$$

La formule est donc héréditaire. Ainsi, $f_n(s) = \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s}$ sur $\mathbb{R}_+$. La figure ci-dessous montre ces densités pour $\lambda = 1$: elles s'étalent vers la droite quand n augmente.



3. Le changement de variable $u = \lambda s$ et l'exercice 8 donnent $\int_0^{+\infty} s^n e^{-\lambda s} ds = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Donc $E(S_n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{n}{\lambda}$. Par linéarité, on retrouve $E(S_n) = n \cdot \frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E(S_n) = n/\lambda$.

4. Avec $\lambda = 1$, $P(S_2 \leq 1) = \int_0^1 s e^{-s} ds = \left[-(s+1)e^{-s} \right]_0^1$. Donc $P(S_2 \leq 1) = 1 - 2/e \approx 0,264$.

5. Pour $s \geq 0$,

$$f(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(s-x)} dx = \lambda \mu e^{-\mu s} \frac{e^{(\mu-\lambda)s} - 1}{\mu - \lambda}.$$

Ainsi, $X + Y$ a pour densité $\frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda s} - e^{-\mu s})$ sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est bien positive, car $e^{-\lambda s} - e^{-\mu s}$ et $\mu - \lambda$ ont le même signe.

Corrigé de l'exercice 16 : Somme de variables normales indépendantes

1. La densité φ est bornée, et les variables sont indépendantes. Pour tout réel s ,

$$f_{X+Y}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + (s-x)^2)/2} dx. \text{ Or } x^2 + (s-x)^2 = 2\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{2}.$$

Donc

$$f_{X+Y}(s) = \frac{e^{-s^2/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x - s/2)^2} dx = \frac{e^{-s^2/4}}{2\pi} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-s^2/4}.$$

On a utilisé $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, obtenu par le changement de variable $t = \sqrt{2} u$ dans l'intégrale de Gauss. On reconnaît la densité de $\mathcal{N}(0, 2)$.

2. Par la propriété admise, $X + Y \sim \mathcal{N}(20, 25)$, d'écart type 5. Donc

$$P(X + Y > 25) = 1 - \Phi(1), \text{ soit } P(X + Y > 25) \approx 0,1587.$$

3. D'abord, $-Y \sim \mathcal{N}(-8, 16)$, par l'exercice 9, et $-Y$ est indépendante de X . Donc $X - Y \sim \mathcal{N}(4, 25)$. Ainsi, $P(X > Y) = P(X - Y > 0) = 1 - \Phi(-0,8) = \Phi(0,8)$. On obtient $X - Y \sim \mathcal{N}(4, 25)$ et $P(X > Y) \approx 0,7881$.
4. Par récurrence, $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$. En divisant par n , $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$. Ensuite, $P(|\bar{X}_n - m| \leq \sigma/10) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) - 1$. Cette probabilité dépasse 0,95 si et seulement si $\sqrt{n}/10 \geq 1,96$, soit $n \geq 384,16$. Donc **le plus petit n vaut 385**.

Corrigé de l'exercice 17 : Approximation normale d'un lancer de pièces

- Les lancers sont indépendants et de même probabilité de succès. Donc $S \sim \mathcal{B}(400; 0,5)$, avec $E(S) = 200$ et $\sigma(S) = \sqrt{100} = 10$.
- On a $n = 400 \geq 30$, $np = 200 \geq 5$ et $n(1-p) = 200 \geq 5$. Par le théorème de Moivre-Laplace, on approche la loi de S par celle de $T \sim \mathcal{N}(200, 100)$.
- Avec correction de continuité,
 $P(190 \leq S \leq 210) \approx P(189,5 \leq T \leq 210,5) = 2\Phi(1,05) - 1$. Donc $P(190 \leq S \leq 210) \approx 0,7062$.
- De même, $P(S \geq 220) \approx P(T \geq 219,5) = 1 - \Phi(1,95)$. Ainsi, $P(S \geq 220) \approx 0,0256$.
- Selon l'approximation corrigée, $P(200 - c \leq S \leq 200 + c) \approx 2\Phi\left(\frac{c + 0,5}{10}\right) - 1$. Cette quantité est au moins 0,95 si et seulement si $\frac{c + 0,5}{10} \geq 1,96$, c'est-à-dire $c \geq 19,1$. Donc $c = 20$: on obtient environ 95 % de chances d'avoir entre 180 et 220 piles.

Corrigé de l'exercice 18 : Minimum et maximum de variables

indépendantes

1. Pour $t \geq 0$, on a $m > t$ si et seulement si tous les X_i dépassent t . Par indépendance,

$$P(m > t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}. \text{ De plus, } m \geq 0. \text{ Donc } m \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

2. Par indépendance, le couple (X_1, X_2) a pour densité $\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$ sur $\mathbb{R}_+^2$. Donc

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left(\int_x^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx.$$

$$\text{Ainsi, } P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

3. Pour $x \in [0, 1]$, $M \leq x$ si et seulement si tous les U_i sont inférieurs à x . Par indépendance, $F_M(x) = x^n$. De plus, $F_M = 0$ sur $] -\infty, 0[$ et $F_M = 1$ sur $]1, +\infty[$. La fonction est continue et C^1 par morceaux. Donc $F_M(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, et M a pour densité $n x^{n-1}$ sur $[0, 1]$.

4. D'abord, $E(M) = \int_0^1 n x^n dx = \frac{n}{n+1}$. Ensuite, $E(M^2) = \frac{n}{n+2}$. Donc

$$V(M) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n((n+1)^2 - n(n+2))}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$\text{Ainsi, } E(M) = \frac{n}{n+1} \text{ et } V(M) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

5. Soit $t \geq 0$ et $n > t$. Alors $P(n(1-M) > t) = P(M < 1 - t/n) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Or $n \ln(1 - t/n) \rightarrow -t$, car $\ln(1+u) \sim u$ en 0 . Par continuité de l'exponentielle, $P(n(1-M) > t) \rightarrow e^{-t}$. Autrement dit, l'écart entre le maximum et 1 est de l'ordre de $1/n$, et sa loi renormalisée se rapproche de $\mathcal{E}(1)$.

Corrigé de l'exercice 19 : Intégrale de Gauss et loi de Rayleigh

1. La fonction $x \rightarrow e^{-x^2/2}$ est continue et positive. De plus, pour $x \geq 2$, $x^2/2 \geq x$, donc

$e^{-x^2/2} \leq e^{-x}$. Par comparaison, I converge.

2. En coordonnées polaires, D_R correspond à $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, avec l'élément d'aire $r dr d\theta$. Donc

$$J(R) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} [-e^{-r^2/2}]_0^R = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-R^2/2}).$$

Ainsi, $J(R) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-R^2/2})$.

3. On a $D_R \subset C_R \subset D_{R\sqrt{2}}$, car un point de C_R est à distance au plus $R\sqrt{2}$ de l'origine. L'intégrande étant positif, on obtient l'encadrement demandé. Par le théorème de Fubini, l'intégrale

sur C_R vaut $\left(\int_0^R e^{-x^2/2} dx \right)^2$. Quand $R \rightarrow +\infty$, les deux bornes tendent vers

$$\frac{\pi}{2}. \text{ Par encadrement, } I^2 = \pi/2, \text{ donc } I = \sqrt{\pi/2}. \text{ Par parité, } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2I = \sqrt{2\pi}.$$

4. Par indépendance, le couple (X, Y) a pour densité $\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$. Pour $r \geq 0$, on intègre sur le disque de rayon r en coordonnées polaires :

$$P(R \leq r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-\rho^2/2} \rho d\rho d\theta = 1 - e^{-r^2/2}.$$

On obtient bien $P(R \leq r) = 1 - e^{-r^2/2}$.

5. Cette fonction de répartition est continue et C^1 sauf en 0. Donc R a pour densité $r e^{-r^2/2}$ sur $\mathbb{R}_+$: c'est la loi de Rayleigh. Ensuite, pour $u \geq 0$,

$$P(R^2 \leq u) = 1 - e^{-u/2}, \text{ donc } R^2 \sim \mathcal{E}(1/2). \text{ Enfin,}$$

$$E(R) = \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}, \text{ car } E(Z^2) = 1. \text{ En}$$

résumé, $f_R(r) = r e^{-r^2/2}$, $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $E(R) = \sqrt{\pi/2} \approx 1,253$.

Corrigé de l'exercice 20 : Queue de la loi normale

1. Soit $x > 0$. Pour $t \geq x$, on a $1 \leq t/x$, donc $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$. En intégrant,

$$1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt = \frac{1}{x} [-\varphi(t)]_x^{+\infty}. \text{ Ainsi, } 1 - \Phi(x) \leq \varphi(x)/x.$$

2. Soit $A > x$. On écrit $\varphi(t) = \frac{1}{t} \cdot t\varphi(t)$ et on intègre par parties avec $u = 1/t$ et $v = -\varphi$:

$$\int_x^A \varphi(t) dt = \left[-\frac{\varphi(t)}{t} \right]_x^A - \int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, le crochet tend vers $\varphi(x)/x$, et l'intégrale converge car

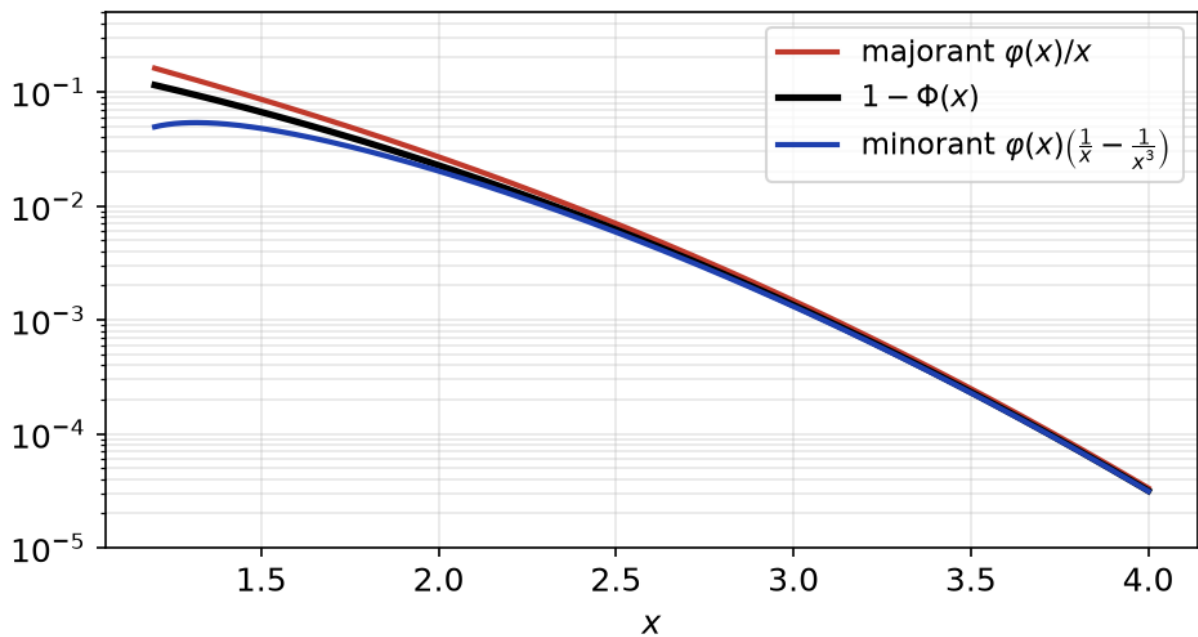
$$\varphi(t)/t^2 \leq \varphi(t)/x^2. \text{ On obtient } 1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

3. Comme à la question 1, pour $t \geq x$, $\frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{t\varphi(t)}{t^3} \leq \frac{t\varphi(t)}{x^3}$. Donc $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \frac{\varphi(x)}{x^3}$.

En reportant dans la question 2, on obtient la minoration. Avec la question 1,

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}.$$

4. En divisant par $\varphi(x)/x > 0$, on obtient $1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)/x} \leq 1$. Par encadrement, le quotient tend vers 1. Donc $1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. La figure ci-dessous, en échelle logarithmique, montre les trois courbes qui se rejoignent.



5. Avec $x = 3$, le majorant vaut $0,00443/3 \approx 0,00148$. Le minorant vaut $0,00443 \times \frac{8}{27} \approx 0,00131$. Donc $0,00131 \leq P(Z > 3) \leq 0,00148$. Par symétrie, $P(|Z| > 3) = 2P(Z > 3) \leq 0,0030$. En revanche, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne seulement $P(|Z| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{9} \approx 0,111$. Ainsi, **la majoration gaussienne est environ 37 fois plus précise.**

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : de la loi géométrique à la loi exponentielle

Partie A.

- La variable X est positive presque sûrement, donc N est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \geq 1$, $N = k$ équivaut à $k-1 \leq X < k$. Donc $P(N = k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda})$. Ainsi, **N suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.**
- Pour une loi géométrique, $E(N) = 1/p$. Donc

$$E(\lfloor X \rfloor) = E(N) - 1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}. \text{ En multipliant par } e^{\lambda}, \text{ on obtient } E(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

3. L'espérance est croissante. Donc $E(\lfloor X \rfloor) \leq E(X) \leq E(\lfloor X \rfloor) + 1$. Comme $E(X) = 1/\lambda$, on obtient $\frac{1}{\lambda} - 1 \leq \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \leq \frac{1}{\lambda}$. Par exemple, pour $\lambda = 1$, on a bien $0 \leq 0,582 \leq 1$.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(N > k) = P(X \geq k) = e^{-\lambda k} = (1-p)^k$. Donc

$$P(N > k + m | N > k) = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m. \text{ Ainsi,}$$

$$P(N > k + m | N > k) = P(N > m). \text{ L'analogue continu est la propriété}$$

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t) \text{ pour tous } s, t \geq 0.$$

Partie B.

1. L'événement $\{T_n > k\}$ signifie que les k premières épreuves sont des échecs. Donc $P(T_n > k) = (1 - \lambda/n)^k$.

2. Soit $t \geq 0$. Comme T_n est entière, $T_n > nt$ équivaut à $T_n > \lfloor nt \rfloor$. Par la question précédente, $P(Y_n > t) = (1 - \lambda/n)^{\lfloor nt \rfloor}$.

3. On écrit $P(Y_n > t) = \exp\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \cdot n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$. D'une part, $nt - 1 < \lfloor nt \rfloor \leq nt$, donc $\lfloor nt \rfloor / n \rightarrow t$. D'autre part, $n \ln(1 - \lambda/n) \rightarrow -\lambda$. Par continuité de l'exponentielle, $P(Y_n > t) \rightarrow e^{-\lambda t}$. Ainsi, pour $t \geq 0$, $F_{Y_n}(t) \rightarrow 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t)$. Pour $t < 0$, les deux valent 0. Donc $F_{Y_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ **pour tout réel** t .

4. Pour la loi géométrique, $E(T_n) = 1/p_n$ et $V(T_n) = (1 - p_n)/p_n^2$. Donc $E(Y_n) = \frac{1}{n p_n} = \frac{1}{\lambda}$ et $V(Y_n) = \frac{1 - \lambda/n}{n^2 \lambda^2 / n^2} = \frac{1 - \lambda/n}{\lambda^2}$. Par conséquent, $E(Y_n) = 1/\lambda = E(X)$ et $V(Y_n) \rightarrow 1/\lambda^2 = V(X)$.

5. Découpons le temps en intervalles de durée $1/n$. À chaque instant k/n , un événement se produit avec la probabilité λ/n , indépendamment du passé. Alors T_n est le numéro du premier intervalle où il se produit, et Y_n l'instant correspondant. Quand le pas tend vers 0, **l'instant du premier événement suit approximativement la loi** $\mathcal{E}(\lambda)$. C'est pourquoi la loi exponentielle est la version continue de la loi géométrique.

Point de méthode : pour comparer une loi discrète et une loi à densité, on compare leurs fonctions de répartition, et non leurs probabilités ponctuelles, qui sont nulles dans le cas continu.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [variables aléatoires à densité, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur variables aléatoires à densité](#)
- À maîtriser avant : [Variables aléatoires discrètes](#), [Intégrales généralisées](#), [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Chapitre suivant : [Géométrie affine](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)