

Trigonométrie

Exercice 1 : Valeurs remarquables et angles associés

1. Calculez sans calculatrice $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\tan \frac{7\pi}{4}$, $\cos \frac{11\pi}{3}$ et $\sin \frac{29\pi}{6}$.
2. Simplifiez, pour tout réel x , l'expression

$$A(x) = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(\pi - x) + \cos(-x).$$
3. Simplifiez, pour tout réel x tel que $x \neq 0$, l'expression

$$B(x) = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$
4. On sait que $\sin x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Calculez $\cos x$, $\tan x$, $\cos(\pi - x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Exercice 2 : Mesures d'angles modulo 2π

1. Parmi les réels $\frac{17\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{8\pi}{3}$, lesquels sont congrus à $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π ?
2. Déterminez la mesure principale, c'est-à-dire le représentant dans $] -\pi, \pi]$, de $\frac{37\pi}{6}$, de $-\frac{25\pi}{4}$ et de $\frac{2027\pi}{3}$.
3. Déterminez les réels x tels que $3x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Combien de points distincts du cercle trigonométrique leur correspondent ? Placez-les.

4. Montrez par un contre-exemple que $3x \equiv 3y \pmod{2\pi}$ n'implique pas $x \equiv y \pmod{2\pi}$.

Exercice 3 : Retrouver les formules à partir de l'addition

On admet uniquement la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, valable pour tous réels a et b , les valeurs $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, et l'impairité du sinus, qui se lit sur le cercle.

1. Montrez que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ pour tout réel x . Déduisez-en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
2. Montrez que $\cos(-x) = \cos x$ pour tout réel x .
3. Déduisez-en $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.
4. Retrouvez les trois expressions de $\cos 2x$ et l'expression de $\sin 2x$.
5. Montrez que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Exercice 4 : Valeurs exactes par addition et duplication

1. En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculez $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Déduisez-en $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$.
3. Calculez $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ de deux façons : à partir de la question 1, puis grâce à la formule $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Vérifiez la cohérence.
4. Calculez $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 5 : Équations trigonométriques élémentaires

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\tan x = \sqrt{3}$.

4. $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

5. $\sin x = \cos 2x$. Montrez que les solutions forment une seule famille, et placez-les sur le cercle.

Exercice 6 : Équations se ramenant à une équation élémentaire

1. Résolvez dans $[0, 2\pi[$ l'équation $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sin x = 1$, en écrivant le premier membre sous la forme $\sqrt{2}\cos(x - \alpha)$.

4. Résolvez dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\sin 2x = \cos x$.

Exercice 7 : Inéquations trigonométriques au cercle

Résolvez chaque inéquation sur l'intervalle indiqué, en vous aidant du cercle trigonométrique.

1. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $] -\pi, \pi]$.

2. $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

3. $2\sin^2 x \leq 1$ sur $[0, 2\pi[$.

4. $\cos 2x > \frac{1}{2}$ sur $] -\pi, \pi]$.

5. $\tan x > 1$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 8 : Transformation de $a \cos x + b \sin x$

1. Soient a et b deux réels non tous les deux nuls, et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Justifiez l'existence d'un réel φ tel que $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$ pour tout réel x .

2. Écrivez $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ sous cette forme, puis résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$.

3. Déterminez le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de $f : x \rightarrow 3 \cos x + 4 \sin x$. Précisez en quels points ils sont atteints.

4. Résolvez sur $] -\pi, \pi]$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos x - \sin x > 1$.

Exercice 9 : Linéarisation de produits

1. À partir des formules d'addition, établissez les expressions de $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$ et $\sin a \cos b$ comme sommes de cosinus ou de sinus.

2. Linéarisez $\cos 3x \cos x$, $\sin 2x \sin 5x$ et $\cos x \sin 4x$.

3. Linéarisez $\cos^3 x$ et $\sin^2 x \cos x$.

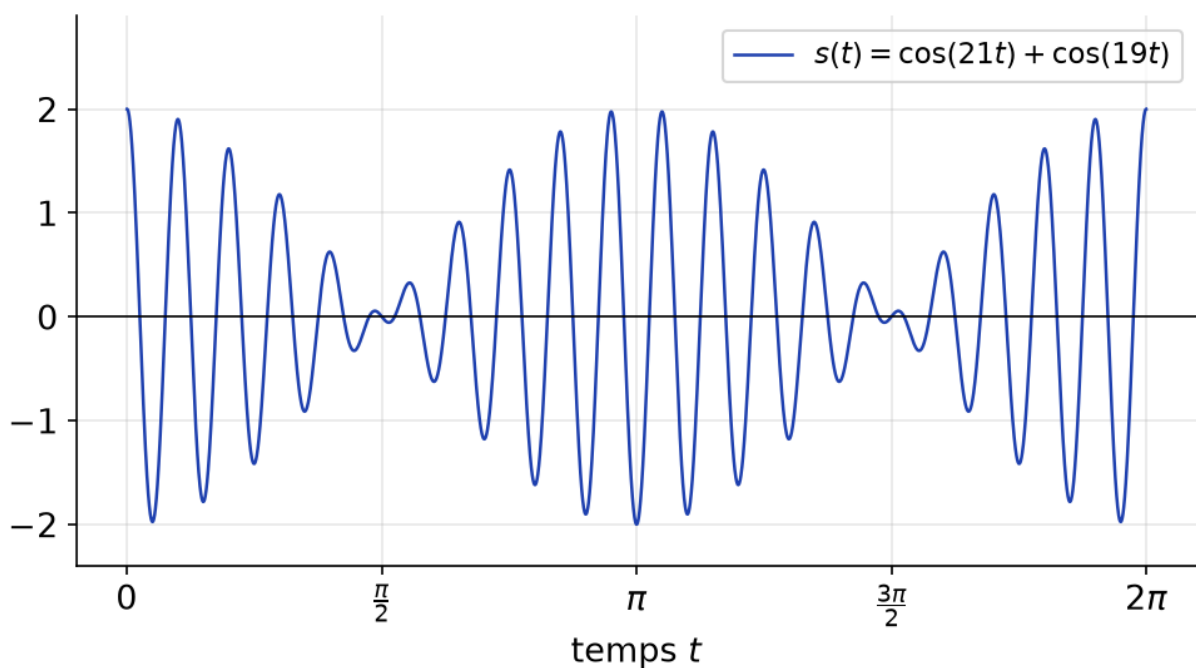
4. Calculez $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin 2x \sin 5x \, dx$.

Exercice 10 : Transformation de sommes en produits

1. En posant $p = a + b$ et $q = a - b$ dans les formules de l'exercice précédent, établissez les formules donnant $\cos p + \cos q$, $\cos p - \cos q$ et $\sin p + \sin q$ sous forme de produits.
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos 3x = 0$.
3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
4. Factorisez $\cos x - \cos 5x$, puis résolvez dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos x = \cos 5x$.

Exercice 11 : Superposition de deux signaux et battements

On considère le signal $s(t) = \cos(21t) + \cos(19t)$, où t désigne le temps. La figure ci-dessous représente s sur $[0, 2\pi]$: son amplitude semble varier lentement.



1. Montrez que $s(t) = 2\cos t \cos(20t)$ pour tout réel t .

- Déterminez les réels $t \in [0, \pi]$ tels que $s(t) = 0$. Combien y en a-t-il ?
- Montrez que $|s(t)| \leq 2|\cos t|$ pour tout réel t , et déterminez les cas d'égalité. Interprétez la figure.
- Deux diapasons émettent des sons de fréquences $f_1 = 442$ Hz et $f_2 = 438$ Hz. On modélise le son perçu par $\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$. Combien de fois par seconde l'intensité s'annule-t-elle ?

Exercice 12 : Fonction tangente et formule d'addition

- Rappelez l'ensemble de définition D de la fonction $\tan$, montrez qu'elle est impaire et π -périodique, et calculez sa dérivée.
- Soient $a, b \in D$ tels que $a + b \in D$. Démontrez que $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- Calculez $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$.
- Établissez la formule de $\tan 2x$, puis déduisez-en la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.
- Soient a, b, c trois éléments de D tels que $a + b + c = \pi$. Montrez que $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

Exercice 13 : L'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ et ses conséquences

- En étudiant $g : x \rightarrow x - \sin x$ sur $\mathbb{R}_+$, montrez que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
- Déduisez-en que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x .
- Montrez que $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x .
- À l'aide d'une formule somme-produit, montrez que $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ et $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ pour tous réels a et b .
- Déduisez-en que les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Étude de la fonction $x \mapsto \sin x (1 + \cos x)$

On pose $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$ pour tout réel x .

1. Montrez que f est 2π -périodique et impaire. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
2. Montrez que $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ pour tout réel x .
3. Dressez le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$. Précisez les tangentes en 0 et en π .
4. Tracez la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$, et donnez le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
5. Pour $x \in]0, \pi[$, on considère les points $A(-1, 0)$, $P(\cos x, \sin x)$ et $P'(\cos x, -\sin x)$. Montrez que l'aire du triangle APP' vaut $f(x)$. Parmi ces triangles, lequel a la plus grande aire ? Quelle est sa nature ?

Exercice 15 : Substitution $t = \tan(x/2)$

1. Soit $x \neq \pi$ et $t = \tan \frac{x}{2}$. Démontrez que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + 2\sin x = 2$.
3. Montrez que $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$ pour tout $x \neq 0$.
4. On pose $g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$. Justifiez que g est définie sur $\mathbb{R}$, exprimez $g(x)$ en fonction de t , puis déterminez l'ensemble des valeurs prises par g .

Exercice 16 : Sommes trigonométriques par télescopage

Soient $n \geq 1$ un entier et x un réel tel que $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$ et $C_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

1. Montrez que $2\sin\frac{x}{2} \sin(kx) = \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$ pour tout entier k .

2. Dédisez-en que $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

3. Par une méthode analogue, montrez que $C_n = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

4. Montrez que $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ pour tout $n \geq 1$.

5. Calculez $\sum_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 17 : Un produit de cosinus et sa limite

Soit $x \in]0, \pi]$. Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \cos\frac{x}{2^k}$.

1. Montrez par récurrence que $2^n \sin\frac{x}{2^n} P_n = \sin x$ pour tout $n \geq 1$.

2. Justifiez que $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$, puis exprimez P_n en fonction de n et de x .

3. En admettant que $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$, déterminez la limite de P_n .

4. Montrez que $\cos\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos y}{2}}$ pour $y \in [0, \pi]$. Dédisez-en, avec $x = \frac{\pi}{2}$, que le produit $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots$ tend vers $\frac{2}{\pi}$.

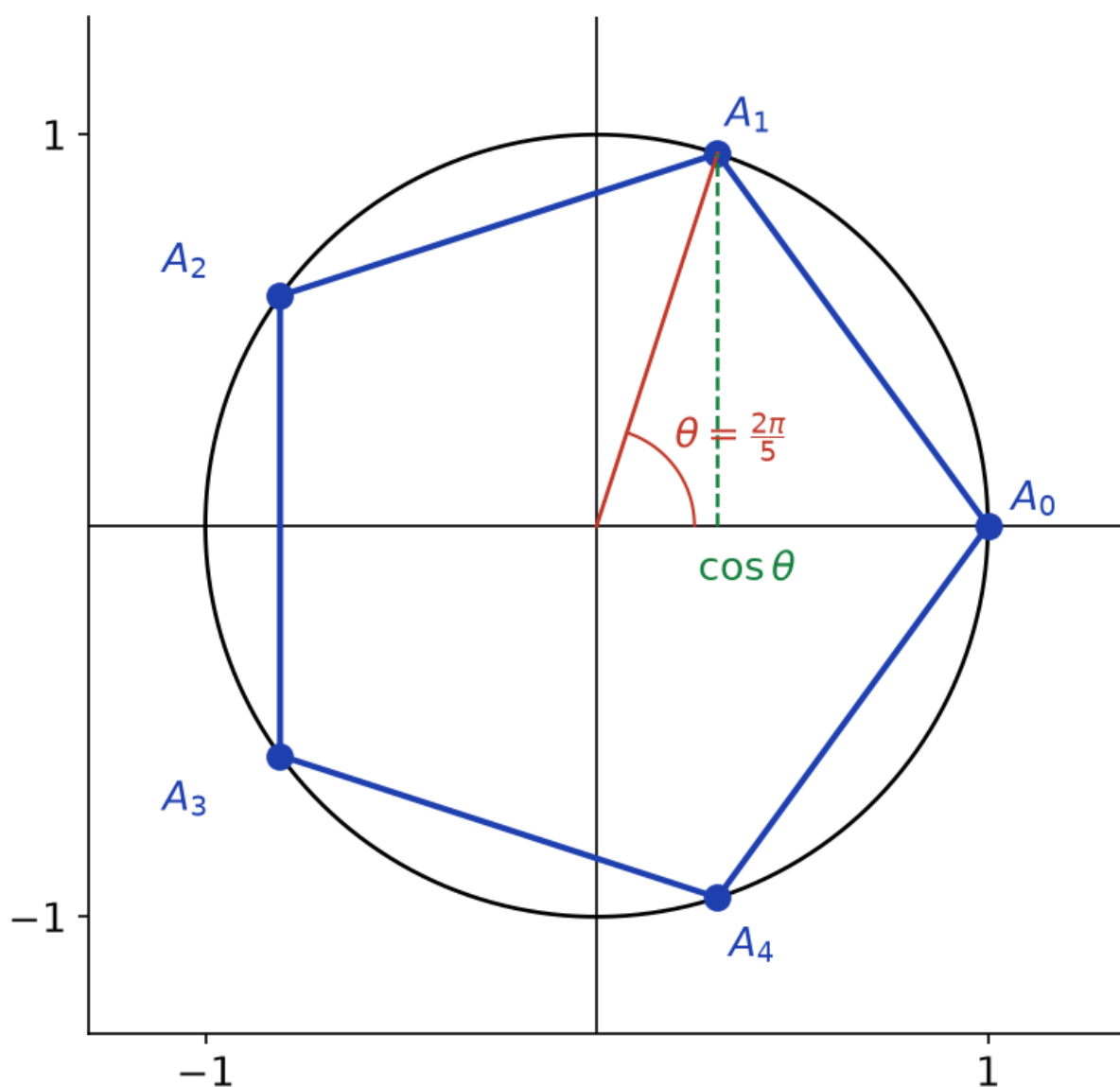
Exercice 18 : Inégalité de Jordan

On se propose de montrer que $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. On pose $h(x) = x \cos x - \sin x$. Étudiez le signe de h sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Déduisez-en le sens de variation de $g : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Démontrez l'encadrement annoncé. Interprétez-le graphiquement à l'aide d'une corde.
4. Montrez que $\cos x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Montrez que $\sin \frac{\pi}{n} \geq \frac{2}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 19 : Problème : $\cos(2\pi/5)$ et le pentagone régulier

On note $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $c = \cos \theta$. Les points $A_k(\cos k\theta, \sin k\theta)$, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, représenté ci-dessous.



1. Montrez que $\cos 3\theta = \cos 2\theta$.
2. Déduisez-en que c est racine du polynôme $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1$.
3. Factorisez ce polynôme par $X - 1$.
4. Montrez que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
5. Déduisez-en $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
6. Vérifiez que la somme des abscisses des cinq sommets est nulle.
7. Calculez la longueur A_0A_1 du côté du pentagone.

Exercice 20 : Problème : les polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \geq 1$,
 $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$.

1. Montrez que $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x .
2. Montrez par récurrence que $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x .
3. Calculez T_2 , T_3 et T_4 . Comparez avec l'exercice 3.
4. Montrez que, pour $n \geq 1$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .
5. Soit $n \geq 1$. Déterminez les réels $x \in [0, \pi]$ tels que $\cos(nx) = 0$. Déduisez-en n racines distinctes de T_n dans $[-1, 1]$. En a-t-il d'autres ?
6. Retrouvez ainsi la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$ obtenue à l'exercice 4.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [trigonométrie, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre suivant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)