

Trigonométrie

I. Trigonométrie : le cercle et les congruences modulo 2π

Toute la trigonométrie repose sur un seul objet : le cercle de centre O et de rayon 1 . On le parcourt à vitesse constante, et les coordonnées du point obtenu définissent le cosinus et le sinus. Ainsi, toutes les formules du chapitre sont des lectures de ce cercle.

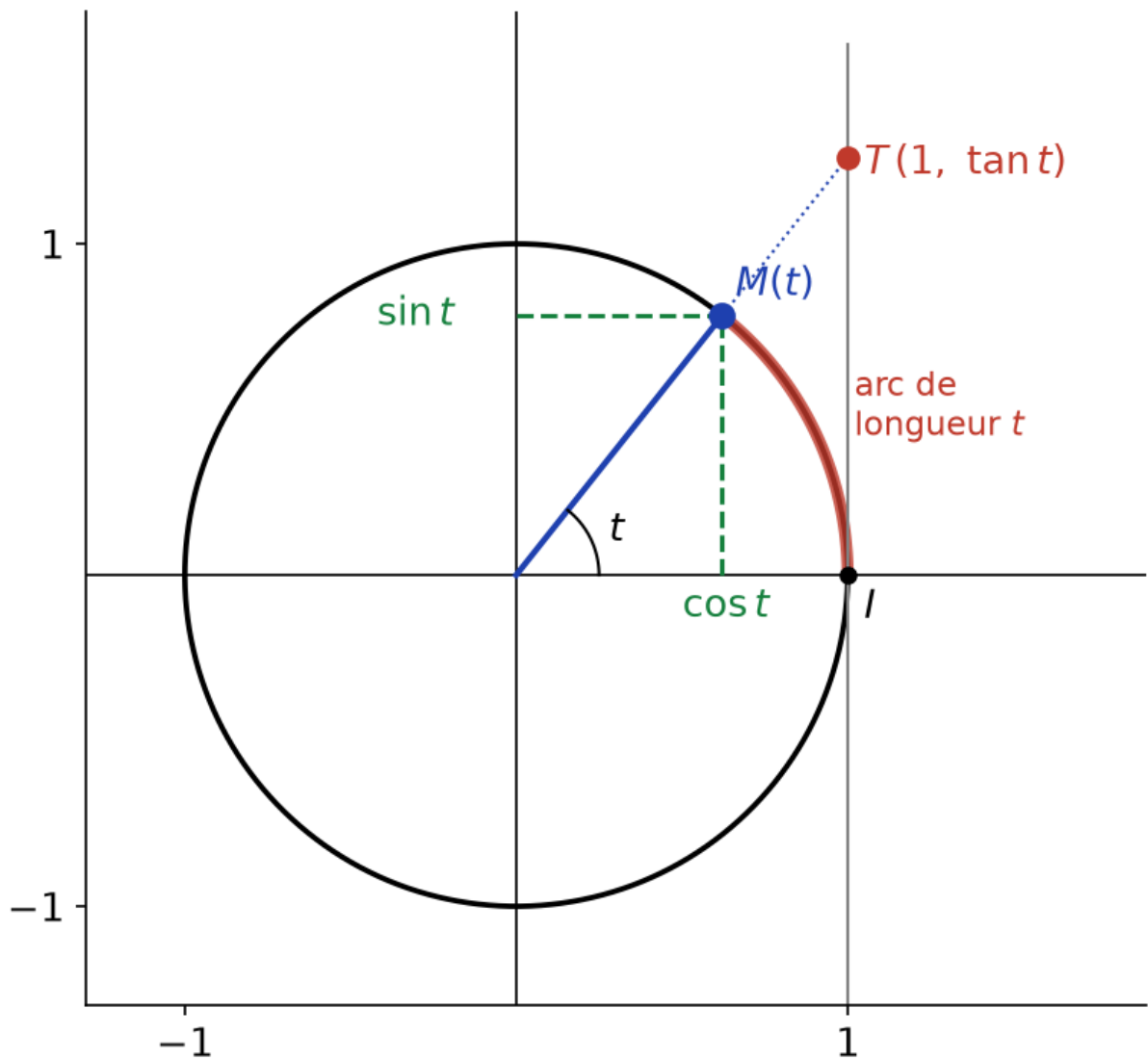
1. Paramétrisation du cercle

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 = 1$. Enfin, I désigne le point $(1, 0)$.

Définition :

Pour tout réel t , on enroule la droite réelle sur $\mathcal{C}$ à partir de I , dans le sens direct. Le point $M(t)$ atteint après un parcours de longueur $|t|$ a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$.
L'application $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ est la **paramétrisation du cercle trigonométrique**.

Comme le montre la figure ci-dessous, $\cos t$ est l'abscisse de $M(t)$ et $\sin t$ son ordonnée. De plus, la droite (OM) coupe la tangente au cercle en I au point d'ordonnée $\tan t$, quand ce point existe.



Propriété :

Pour tout réel t , on a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc $-1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$.
Réciproquement, pour tout couple (a, b) tel que $a^2 + b^2 = 1$, il existe un réel t tel que $a = \cos t$ et $b = \sin t$.

2. Congruence modulo 2π

Le cercle a pour périmètre 2π . Par conséquent, deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π donnent le même point. Cette remarque justifie la définition suivante.

Définition :

Soit a un réel non nul. Deux réels x et y sont **congrus modulo a** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$. On note alors $x \equiv y \pmod{a}$.

Théorème :

Pour tous réels x et y :

- $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi}$;
- $\sin x = \sin y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi}$;
- $\cos x = \cos y \text{ et } \sin x = \sin y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2\pi}$.

En effet, une droite verticale coupe le cercle en au plus deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. De même, une droite horizontale le coupe en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :

On a $\frac{47\pi}{6} = 8\pi - \frac{\pi}{6}$. Donc $\frac{47\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, et $\cos \frac{47\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Attention :

On peut ajouter deux congruences modulo 2π , ou les multiplier par un entier. En revanche, on ne peut pas les diviser sans précaution. Par exemple, $3x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ donne $x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$, et non $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

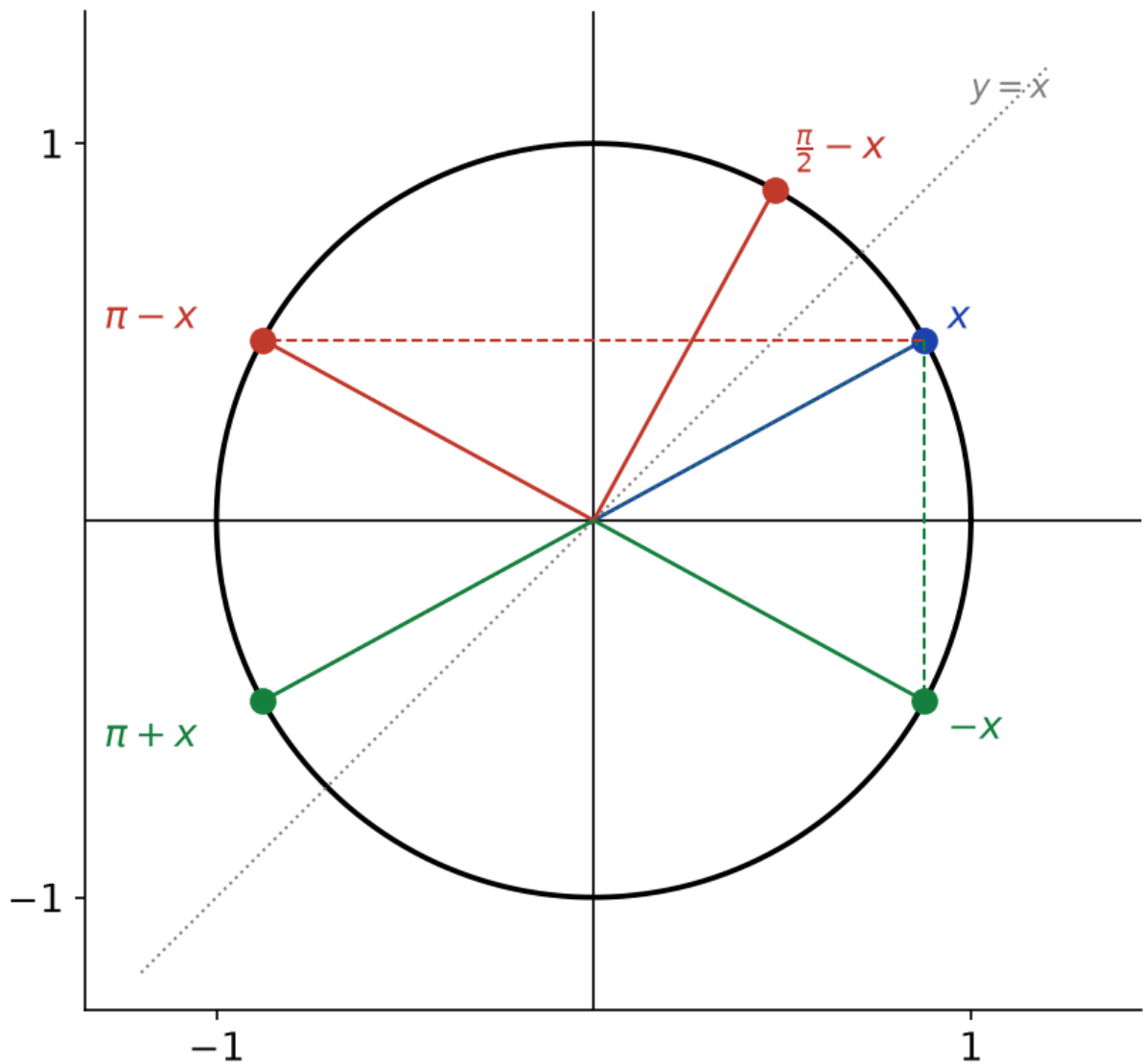
II. Valeurs remarquables et angles associés

Quelques valeurs se lisent directement sur des triangles équilatéraux ou isocèles rectangles. Il faut les connaître sans hésiter, car elles servent dans tous les calculs.

Propriété :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Ensuite, les symétries du cercle relient les valeurs en x à celles en $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$ et $\frac{\pi}{2} - x$. La figure suivante les montre toutes : il suffit de lire les coordonnées des points.



Propriété :

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x, \sin(-x) = -\sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x, \sin(\pi - x) = \sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, \sin(\pi + x) = -\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Il est inutile d'apprendre ce tableau par cœur. En effet, chaque ligne correspond à une symétrie simple :
 axe des abscisses pour $-x$, axe des ordonnées pour $\pi - x$, centre O pour $\pi + x$, et première bissectrice pour $\frac{\pi}{2} - x$.

Exemple :

On a $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Donc $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De même, $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ donne $\cos \frac{5\pi}{4} = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

III. Formules d'addition et de duplication

Ce paragraphe est le cœur du chapitre. Une seule formule suffit à tout retrouver : celle de $\cos(a - b)$. Nous la démontrons, puis nous en déduisons toutes les autres en quelques lignes.

1. Les formules d'addition

Théorème :

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, & \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Démonstration :

On considère les vecteurs unitaires $\vec{u} = (\cos a, \sin a)$ et $\vec{v} = (\cos b, \sin b)$. L'angle orienté de $\vec{v}$ vers $\vec{u}$ mesure $a - b$. D'une part, le produit scalaire vaut

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(a - b) = \cos(a - b). \text{ D'autre part, en coordonnées,} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \text{ On obtient ainsi la première formule.} \end{aligned}$$

Ensuite, on remplace b par $-b$: la parité du cosinus et l'imparité du sinus donnent $\cos(a + b)$. Enfin, $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$. On développe avec la première

formule, puis on utilise $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$.

Méthode :

Pour **retrouver une formule** oubliée, partez toujours de

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Changez b en $-b$ pour obtenir $\cos(a + b)$.

Remplacez a par $\frac{\pi}{2} - a$ pour passer au sinus. Enfin, vérifiez le signe avec une valeur simple, par exemple $a = b = \frac{\pi}{2}$.

Exemple :

Puisque $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on obtient :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

2. Les formules de duplication

En prenant $a = b = x$ dans les formules d'addition, on obtient aussitôt les formules de duplication. De plus, la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ fournit trois écritures de $\cos 2x$.

Corollaire :

Pour tout réel x :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Par conséquent, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Les deux dernières formules sont essentielles. En effet, elles abaissent le degré : on dit qu'elles **linéarisent** $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$. Autrement dit, elles transforment un carré en une expression du premier degré en $\cos 2x$.

Exemple :

On a $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Or $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

IV. Transformer un produit en somme, et réciproquement

En additionnant ou en soustrayant deux formules d'addition, on fait apparaître des produits. Ces formules servent à calculer des primitives, des sommes, et à factoriser des équations.

1. Produits en sommes

Propriété :

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)], \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)], \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].\end{aligned}$$

Pour $\cos a \sin b$, on échange les rôles : $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$.

Démonstration :

On ajoute $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Les termes en sinus disparaissent, d'où la première ligne. Ensuite, en soustrayant ces deux égalités, on obtient la deuxième. Enfin, la somme de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ donne la troisième.

Exemple :

On a $\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$. Ainsi, une primitive de $x \rightarrow \cos 3x \cos x$ est $x \rightarrow \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$.

2. Sommes en produits

On pose $p = a + b$ et $q = a - b$, c'est-à-dire $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. Les formules précédentes se lisent alors dans l'autre sens.

Propriété :

Pour tous réels p et q :

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, & \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Méthode :

Pour **résoudre une équation** du type $\cos(\alpha x) + \cos(\beta x) = 0$, transformez la somme en produit. Ensuite, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Vous obtenez ainsi deux équations élémentaires.

Remarque :

Il est inutile d'apprendre ces huit formules. Retenez plutôt le calcul qui les produit : additionner deux formules d'addition, puis poser $p = a + b$ et $q = a - b$. En physique, la formule $\cos p + \cos q$ explique le phénomène de battements entre deux sons de fréquences voisines.

V. Équations et inéquations trigonométriques

Toute équation trigonométrique se ramène, après transformation, à l'une des trois équations fondamentales. Il faut ensuite lire les solutions sur le cercle, sans en oublier.

1. Les équations fondamentales

Théorème :

Soit α un réel. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 \cos x = \cos \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \\
 &\text{, ou} \\
 x = -\alpha + 2k\pi, \\
 &\text{, } k \in \mathbb{Z}, \\
 \sin x = \sin \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \\
 &\text{, ou} \\
 x = \pi - \alpha + 2k\pi, \\
 &\text{, } k \in \mathbb{Z}, \\
 \tan x = \tan \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \\
 &\text{, } k \in \mathbb{Z} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \right. \\
 &\quad \left. , [\pi] \rightarrow \right).
 \end{aligned}$$

Exemple :

Réolvons $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, on obtient $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Donc $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On divise bien la période par 2 en même temps que x .

Attention :

Ne divisez jamais les deux membres par $\cos x$ ou par $\sin x$: vous perdriez les solutions qui annulent ce facteur. Par exemple, $\sin 2x = \cos x$ s'écrit $\cos x (2 \sin x - 1) = 0$. Ainsi, les solutions sont celles de $\cos x = 0$ et celles de $\sin x = \frac{1}{2}$. De plus, quand deux familles de solutions apparaissent, placez-les sur le cercle : l'une peut contenir l'autre.

2. Inéquations : la lecture au cercle

Pour une inéquation, on trace le cercle et la droite correspondant à la borne. Par exemple, $\cos x \geq \frac{1}{2}$ signifie que le point $M(x)$ est à droite de la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$. La figure ci-dessous montre

l'arc solution.



Méthode :

Pour **résoudre une inéquation au cercle** sur un intervalle de longueur 2π :

1. résolvez d'abord l'équation associée et placez les points obtenus sur le cercle ;
2. tracez la droite verticale (pour $\cos$) ou horizontale (pour $\sin$) passant par ces points ;
3. repérez l'arc qui convient, puis parcourez-le dans le sens direct pour écrire l'intervalle, en respectant l'intervalle d'étude.

Exemple :

Sur $]-\pi, \pi]$, l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$ a pour ensemble de solutions $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Sur $[0, 2\pi[$, en revanche, l'ensemble devient $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$. L'arc est le même, mais sa description dépend de l'intervalle choisi.

3. L'expression $a \cos x + b \sin x$

Les formules d'addition permettent de regrouper une combinaison de $\cos x$ et de $\sin x$ en un seul cosinus. C'est la forme dite « amplitude-phase » des physiciens.

Propriété :

Soient $(a, b) \neq (0, 0)$ et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe un réel φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r}$. Alors, pour tout réel x , $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$.

Démonstration :

Le couple $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ vérifie $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = 1$. D'après le paragraphe I, il existe donc φ tel que $\frac{a}{r} = \cos \varphi$ et $\frac{b}{r} = \sin \varphi$. Ensuite,
 $r \cos(x - \varphi) = r(\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi) = a \cos x + b \sin x$.

Exemple :

Ici $a = 1$, $b = 1$ et $r = \sqrt{2}$. Donc $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. En particulier, la fonction $x \rightarrow \cos x + \sin x$ a pour maximum $\sqrt{2}$, atteint en $x = \frac{\pi}{4}$.

VI. Les fonctions cosinus, sinus et tangente

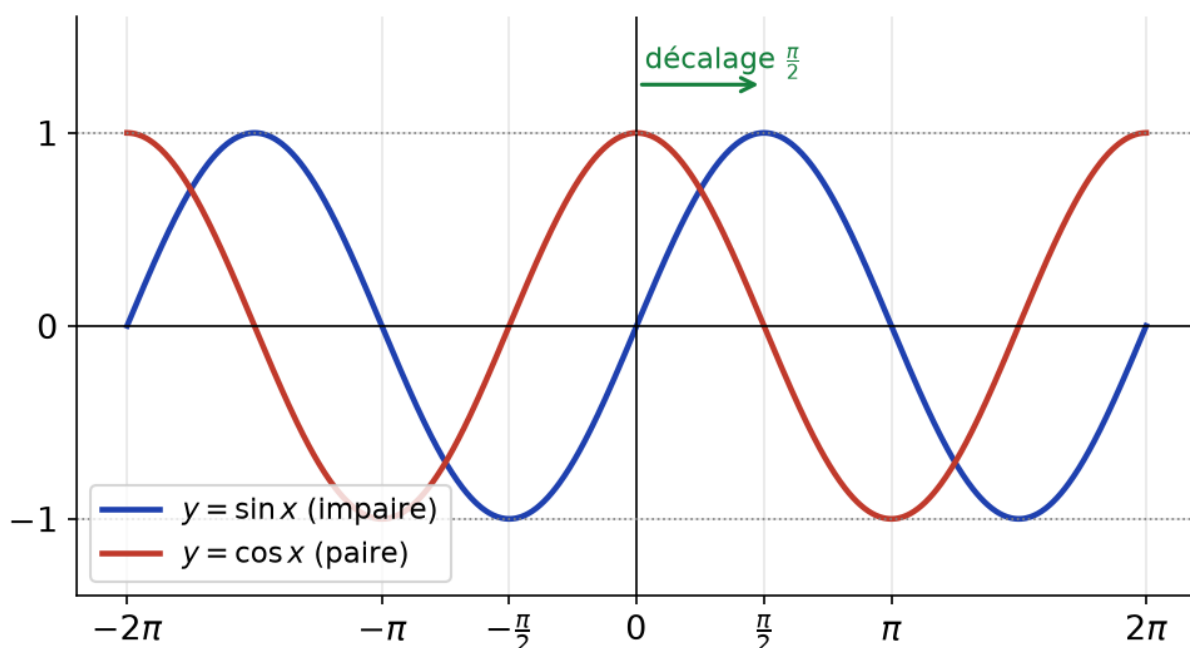
On étudie maintenant $\cos$, $\sin$ et $\tan$ comme des fonctions d'une variable réelle. Leurs propriétés découlent du cercle et des formules précédentes.

1. Cosinus et sinus

Propriété :

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques. La fonction $\cos$ est paire, la fonction $\sin$ est impaire. Elles sont dérivables, avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Enfin, pour tout réel x , $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ainsi, la courbe du cosinus se déduit de celle du sinus par une translation de $-\frac{\pi}{2}$ selon l'axe des abscisses. La figure ci-dessous représente les deux courbes sur $[-2\pi, 2\pi]$.



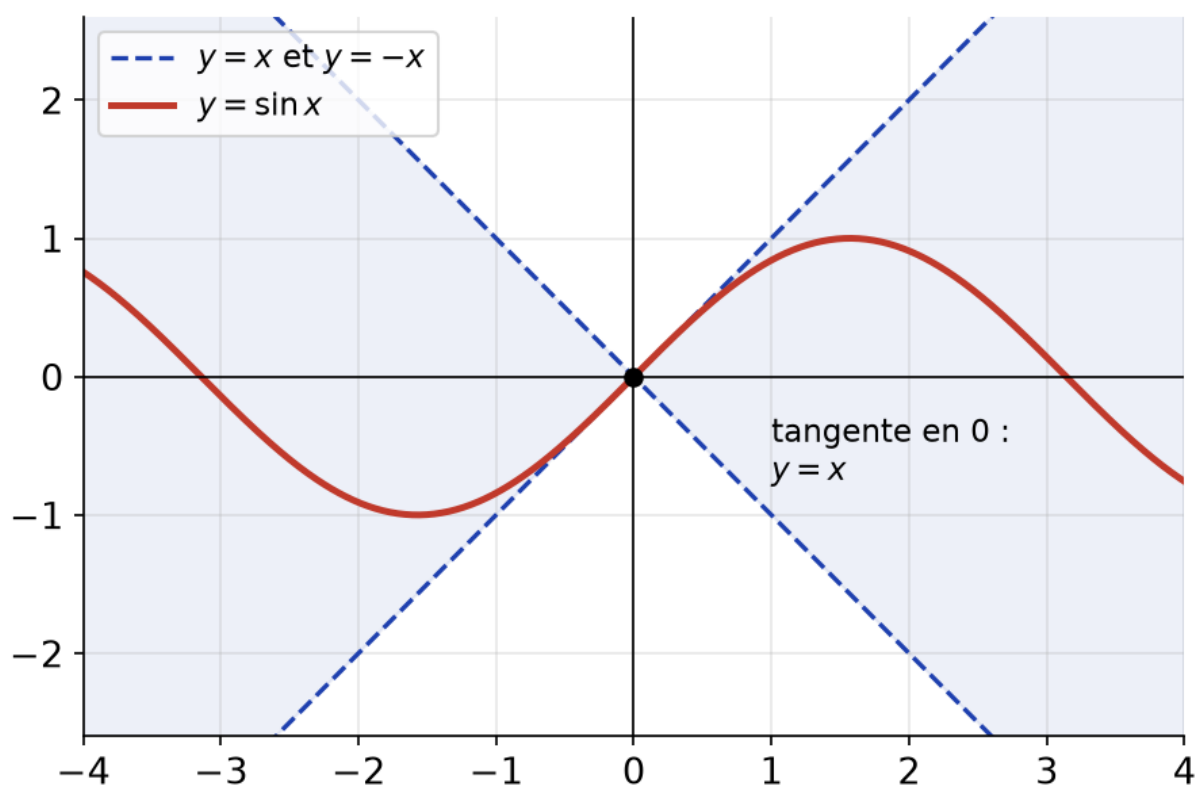
Une inégalité fondamentale compare le sinus à l'identité. Elle sert en analyse pour majorer, et elle exprime que la tangente en 0 à la courbe du sinus est la droite $y = x$.

Théorème :

Pour tout réel x , on a $|\sin x| \leq |x|$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration :

Par imparité, il suffit de traiter $x \geq 0$. Si $x > 1$, alors $|\sin x| \leq 1 < x$. Supposons donc $0 \leq x \leq 1$. Posons $g(t) = t - \sin t$ sur $[0, 1]$. Alors $g'(t) = 1 - \cos t > 0$ sur $]0, 1]$, donc g est strictement croissante. Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) > 0$ pour $x \in]0, 1]$. Or $\sin x \geq 0$ sur $[0, 1]$, puisque $1 < \pi$. Par conséquent, $|\sin x| = \sin x < x$ pour $x \in]0, 1]$.



Comme le montre la figure précédente, la courbe du sinus reste dans la zone $|y| \leq |x|$. De plus, elle ne touche les droites $y = \pm x$ qu'à l'origine.

2. La fonction tangente

Définition :

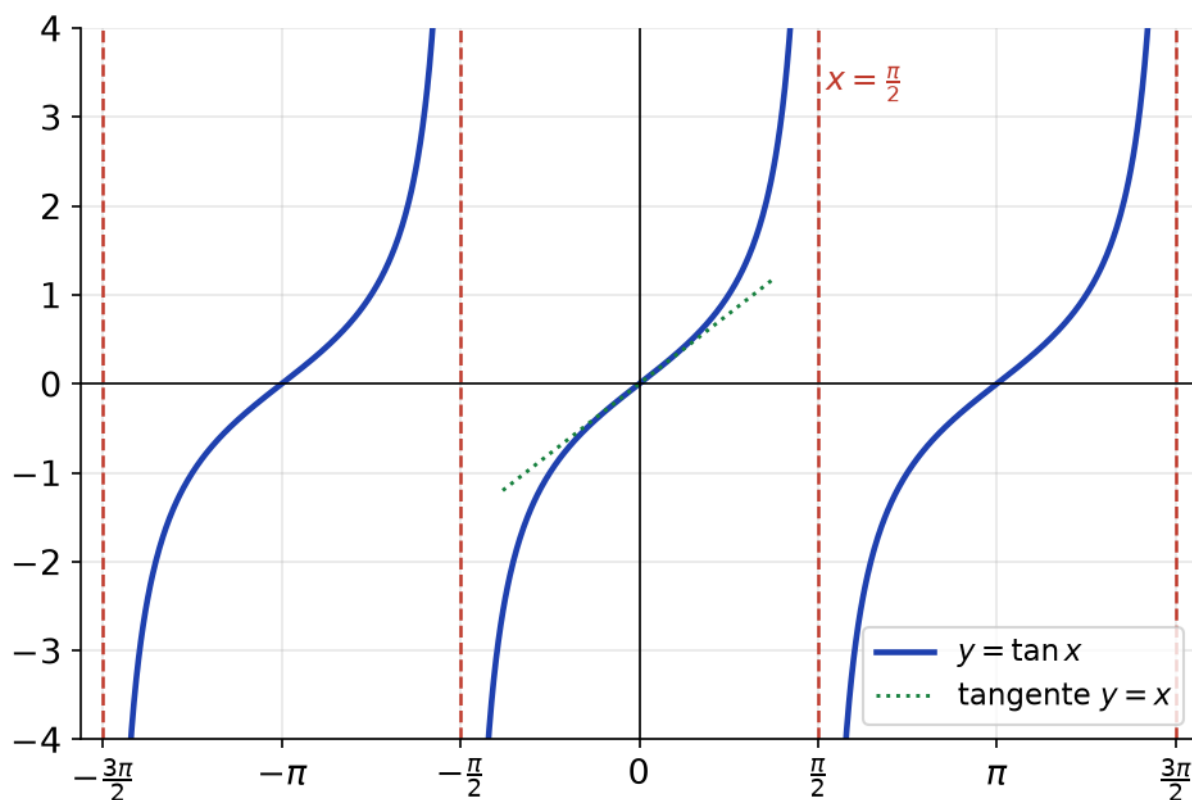
La fonction **tangente** est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Propriété :

La fonction $\tan$ est impaire et π -périodique. Elle est dérivable sur D , avec $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Elle est donc strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, et ses

limites en $\pm \frac{\pi}{2}$ sont $\pm \infty$.

La courbe de la tangente présente donc des asymptotes verticales d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, comme on le voit ci-dessous.



Théorème :

Soient a et b deux réels tels que a , b et $a + b$ appartiennent à D . Alors :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

, (si $a - b \in D$).

Démonstration :

On écrit $\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$. Ensuite, on divise le numérateur et le dénominateur par $\cos a \cos b$, qui est non nul puisque $a, b \in \mathcal{D}$. Le dénominateur devient $1 - \tan a \tan b$; il est non nul, car $\cos(a+b) \neq 0$. Enfin, on change b en $-b$ pour la seconde formule.

Exemple :

Avec $a = b = x$, on obtient $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$. Par exemple,
 $\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

3. Étudier une fonction trigonométrique

L'étude d'une fonction construite avec $\cos$ et $\sin$ suit un plan fixe. En effet, la périodicité et la parité réduisent fortement l'intervalle d'étude. Ensuite, les formules de duplication permettent souvent de factoriser la dérivée.

Méthode :

Pour **étudier et tracer** une fonction trigonométrique f :

1. cherchez une période T , puis une parité : l'étude se ramène alors à $\left[0, \frac{T}{2}\right]$;
2. dérivez, puis factorisez $f'(x)$ à l'aide des formules de duplication ou des formules somme-produit ;
3. étudiez le signe de chaque facteur au cercle, dressez le tableau de variations et calculez les valeurs aux points remarquables ;
4. enfin, tracez la courbe sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, complétez par symétrie, puis par translations de T .

Exemple :

Soit $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$. D'abord, f est 2π -périodique et paire : on l'étudie sur $[0, \pi]$. Ensuite, $f'(x) = -\sin x - \sin 2x = -\sin x (1 + 2\cos x)$, grâce à $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Sur $[0, \pi]$, on a $\sin x \geq 0$. De plus, $1 + 2\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$ et $1 + 2\cos x < 0$ sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. Par conséquent, f décroît sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, puis croît sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. Enfin, $f(0) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ et $f(\pi) = -\frac{1}{2}$. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut donc $-\frac{3}{4}$, et son maximum $\frac{3}{2}$.

VII. Expression en fonction de $\tan(t/2)$

Il est souvent utile d'exprimer $\cos t$ et $\sin t$ comme des fractions rationnelles d'une seule variable. La substitution suivante le permet. Elle servira plus tard pour calculer des primitives.

Théorème :

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{t}{2} \neq \pi$. On pose $u = \tan \frac{t}{2}$. Alors :

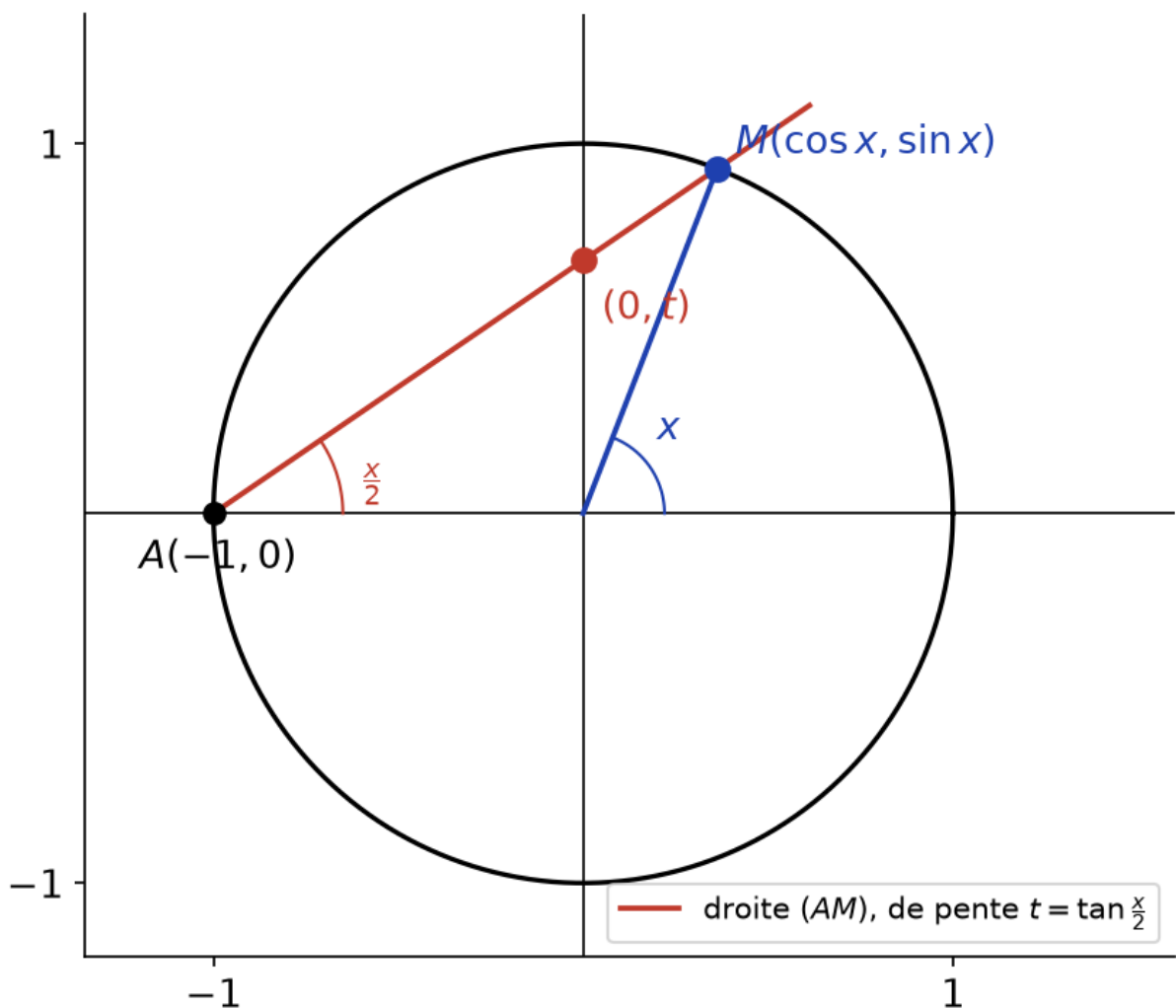
$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \tan t = \frac{2u}{1 - u^2},$$

,(si $u^2 \neq 1$).

Démonstration :

Comme $\frac{t}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, on a $\cos \frac{t}{2} \neq 0$ et $\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{1+u^2}$. D'une part, la duplication donne
 $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2} (1 - u^2)$. D'autre part,
 $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 2u \cos^2 \frac{t}{2}$. On remplace $\cos^2 \frac{t}{2}$ par $\frac{1}{1+u^2}$, puis on fait le quotient.

Géométriquement, la droite qui joint $A(-1, 0)$ au point $M(t)$ a pour pente $\tan \frac{t}{2}$. En effet, l'angle inscrit en A vaut la moitié de l'angle au centre. La figure ci-dessous illustre ce fait.



Méthode :

Pour résoudre $a \cos x + b \sin x = c$ par la **substitution** $u = \tan \frac{x}{2}$:

1. testez à part les réels $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$, pour lesquels u n'est pas défini ;
2. pour les autres, remplacez $\cos x$ et $\sin x$, puis multipliez par $1 + u^2$: vous obtenez une équation du second degré en u ;
3. enfin, revenez à x grâce à $\tan \frac{x}{2} = u$, en tenant compte de la π -périodicité de la tangente.

Exemple :

Réolvons $\cos x + \sin x = 1$. Pour $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$, on trouve $-1 \neq 1$. Sinon, avec $u = \tan \frac{x}{2}$, on obtient $1 - u^2 + 2u = 1 + u^2$, soit $2u(1 - u) = 0$. Ainsi $u = 0$ ou $u = 1$, c'est-à-dire $x = 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ce qu'il faut retenir

- Le point $M(t) = (\cos t, \sin t)$ parcourt le cercle trigonométrique ; deux réels donnent le même point si et seulement s'ils sont congrus modulo 2π .
- Les angles associés $-x$, $\pi \pm x$ et $\frac{\pi}{2} \pm x$ se lisent par symétrie sur le cercle.
- Tout se déduit de $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$: addition, duplication, linéarisation.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ abaissent le degré.
- Les formules produit-somme s'obtiennent en ajoutant deux formules d'addition ; on les lit dans l'autre sens avec $p = a + b$ et $q = a - b$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x \equiv \pm \alpha \pmod{2\pi}$; $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha \text{ ou } \frac{\pi - \alpha}{2\pi} \pmod{2\pi}$;

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

- Une inéquation se résout au cercle, en décrivant l'arc solution dans l'intervalle demandé.
- $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$
- $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x , et $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$
- Avec $u = \tan \frac{t}{2}$: $\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$ et $\sin t = \frac{2u}{1 + u^2}.$

Questions fréquentes sur trigonométrie

Faut-il apprendre toutes les formules de trigonométrie par cœur ?

Non. Il suffit de connaître $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et les valeurs remarquables. Les formules de $\cos(a + b)$, du sinus, de duplication et de linéarisation s'en déduisent en quelques lignes. En revanche, il faut s'entraîner à faire ces déductions très vite.

Comment ne pas oublier de solutions dans une équation trigonométrique ?

Ramenez l'équation à $\cos x = \cos \alpha$, $\sin x = \sin \alpha$ ou $\tan x = \tan \alpha$, puis écrivez les deux familles de solutions (une seule pour la tangente). Ne divisez jamais par une expression qui peut s'annuler : factorisez. Enfin, placez les solutions sur le cercle pour repérer les doublons.

Quand utiliser la substitution $t = \tan(x/2)$?

Elle sert quand une expression contient à la fois $\cos x$ et $\sin x$ et qu'on veut une seule variable. On obtient $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$. Pensez à traiter à part les réels $\frac{x \equiv \pi}{[2\pi]}$, où t n'est pas défini.

Pourquoi l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ est-elle si utile ?

Elle permet de majorer simplement des sinus, et elle traduit que la tangente en 0 à la courbe du sinus est $y = x$. Combinée aux formules somme-produit, elle donne $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$. On en déduit la continuité du sinus et du cosinus sans calcul de limite.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur trigonométrie](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre suivant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)