Trigonométrie

Corrigé de l'exercice 1 : Valeurs remarquables et angles associés

1. On se ramène chaque fois à un angle de référence.
   - $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   - Le sinus est impair, donc $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   - $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.
   - $\frac{11\pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{11\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
   - $\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$, donc $\sin\frac{29\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

   Résultats : $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$ **et** $\frac{1}{2}$.

2. On a $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$. Par conséquent, $A(x) = -\sin x + \sin x - 2\cos x + \cos x$. **Ainsi,** $A(x) = -\cos x$ **.**

3. La condition $x \neq 0 \ [\frac{\pi}{2}]$ assure que $\tan x$ est défini et non nul, et que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ l'est aussi. D'abord, $\tan(\pi - x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Ensuite, la tangente est π-périodique, donc $\tan(\pi + x) = \tan x$. Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, d'où $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \tan x$. **Donc** $B(x) = \tan x$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. On a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, donc $\cos x \leq 0$, et $\cos x = -\frac{4}{5}$. Il vient $\tan x = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$. De plus, $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{4}{5}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = -\frac{4}{5}$. **Résultats :** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$, $\cos(\pi - x) = \frac{4}{5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{4}{5}$.

Point de méthode : retirez d'abord le plus grand multiple de 2π possible, puis reconnaissez $\pi \pm \alpha$ ou $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ avec α remarquable.

Corrigé de l'exercice 2 : Mesures d'angles modulo 2π

1. On calcule la différence avec $-\frac{\pi}{3}$ et on regarde si c'est un multiple de 2π.
   - $\frac{17\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi = 3 \times 2\pi$: oui.
   - $\frac{13\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}$, qui n'est pas un multiple entier de 2π : non.
   - $-\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -2\pi$: oui.
   - $\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$: oui.
   - $\frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3\pi$: non, car $3\pi = \frac{3}{2} \times 2\pi$.

   Les réels congrus à $-\frac{\pi}{3}$ sont $\frac{17\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

2. D'abord, $\frac{37\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6}$, et $6\pi = 3 \times 2\pi$: la mesure principale est $\frac{\pi}{6}$. Ensuite, $-\frac{25\pi}{4} = -6\pi - \frac{\pi}{4}$: la mesure principale est $-\frac{\pi}{4}$. Enfin, $2027 = 3 \times 675 + 2$, donc $\frac{2027\pi}{3} = 675\pi + \frac{2\pi}{3} = 674\pi + \frac{5\pi}{3}$. Or $674\pi = 337 \times 2\pi$ et $\frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$. **Les mesures principales sont $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{3}$.**

3. On a $3x \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, c'est-à-dire

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$. Autrement dit, $x \equiv \frac{\pi}{6} \ [\frac{2\pi}{3}]$. Pour $k = 0, 1, 2$, on obtient $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ensuite, pour $k = 3$, on retrouve $\frac{\pi}{6} + 2\pi$, donc le premier point. **Il y a trois points : ceux d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$, sommets d'un triangle équilatéral.**

4. Prenons $x = 0$ et $y = \frac{2\pi}{3}$. Alors $3x = 0$ et $3y = 2\pi$, donc $3x \equiv 3y \ [2\pi]$. En revanche, $y - x = \frac{2\pi}{3}$ n'est pas un multiple de 2π. **Donc $3x \equiv 3y \ [2\pi]$ n'implique pas $x \equiv y \ [2\pi]$** ; on a seulement $x \equiv y \ [\frac{2\pi}{3}]$.

Corrigé de l'exercice 3 : Retrouver les formules à partir de l'addition

1. Avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = x$, la formule admise donne $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \times \cos x + 1 \times \sin x = \sin x$. Ensuite, on applique ce résultat à $\frac{\pi}{2} - x$ à la place de x : $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.**

2. Avec $a = 0$ et $b = x$, on obtient $\cos(-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = \cos x$. **Le cosinus est donc pair.**

3. On écrit $a + b = a - (-b)$. Grâce à la parité du cosinus et à l'imparité du sinus :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Ensuite, d'après la question 1, $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$. On développe :

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

On retrouve $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

4. Avec $a = b = x$, on obtient $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. De plus, la formule admise avec $a = b = x$ donne $\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x$, donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, puis $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on conclut. **Donc** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ **et** $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

5. On écrit $3x = 2x + x$. Notons $c = \cos x$ et $s = \sin x$.

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c = 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2sc^2 + (1 - 2s^2)s \\ &= 2s(1 - s^2) + s - 2s^3 = 3s - 4s^3.\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ **et** $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Point de méthode : pour vérifier une formule retrouvée, testez-la en une valeur simple. Par exemple, avec $x = \frac{\pi}{2}$, on a bien $\sin \frac{3\pi}{2} = -1 = 3 - 4$.

Corrigé de l'exercice 4 : Valeurs exactes par addition et duplication

1. On applique les formules de soustraction :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **et** $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. D'une part, $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, donc $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$. D'autre part, $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, donc $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Ainsi,** $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ **et** $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$**.** On retrouve $\cos \frac{7\pi}{12} = -\cos \frac{5\pi}{12}$, ce qui est cohérent avec $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$.

3. Première méthode : $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Seconde méthode : $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **Les deux calculs donnent** $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ **.**

4. On a $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Or $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc le cosinus et le sinus sont positifs. **Par conséquent,** $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ **et** $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **.**

Corrigé de l'exercice 5 : Équations trigonométriques élémentaires

1. On a $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. D'après le théorème du cours, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. **Les solutions sont les réels** $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **et** $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

2. On a $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Donc $2x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $2x = \pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi$. On divise par 2, sans oublier la période. **Les solutions sont** $x = -\frac{\pi}{8}+k\pi$ **et** $x = \frac{5\pi}{8}+k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

3. On a $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$, et la tangente est π-périodique. **Les solutions sont** $x = \frac{\pi}{3}+k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

4. L'égalité $\cos 3x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ équivaut à $3x = x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $3x = -x-\frac{\pi}{4}+2k\pi$. La première donne $2x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{8}+k\pi$. La seconde donne $4x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$. **Les solutions sont** $\frac{\pi}{8}+k\pi$ **et** $-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

5. On écrit $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. L'équation devient $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Ainsi, $2x = \frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2}+x+2k\pi$. D'une part, $x = \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$. D'autre part, $x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Or, avec $k = -1$ dans la première famille, on obtient $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. La seconde famille est donc incluse dans la première. **Les solutions sont les réels** $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ **,** $k \in \mathbb{Z}$ **: ce sont les points** $\frac{\pi}{6}$ **,** $\frac{5\pi}{6}$ **et** $\frac{3\pi}{2}$ **du cercle.** Vérification : en $x = \frac{3\pi}{2}$, $\sin x = -1$ et $\cos 3\pi = -1$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Point de méthode : quand deux familles de solutions apparaissent, placez-les sur le cercle pour repérer les doublons.

Corrigé de l'exercice 6 : Équations se ramenant à une équation élémentaire

1. On pose $X = \cos x$. L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$, soit $(2X-1)(X-1) = 0$. Donc $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$. Dans $[0, 2\pi[$, la première donne $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$, la seconde donne 0. **L'ensemble des solutions est** $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

2. On remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$: $2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$, c'est-à-dire $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$. Le discriminant de $2X^2 - 3X - 2$ vaut $9 + 16 = 25$. Les racines sont donc $\frac{3+5}{4} = 2$ et $\frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$. Or $\cos x = 2$ est impossible. Il reste $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$. **Les solutions sont** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

3. On a $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. L'équation équivaut donc à $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$. Ainsi, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. **Les solutions sont** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **et** $x = 2k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

4. Grâce à la duplication, $\sin 2x - \cos x = 2\sin x\cos x - \cos x = \cos x\,(2\sin x - 1)$. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. D'abord, $\cos x = 0$ donne $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ensuite, $\sin x = \frac{1}{2}$ donne $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. **L'ensemble des solutions est** $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

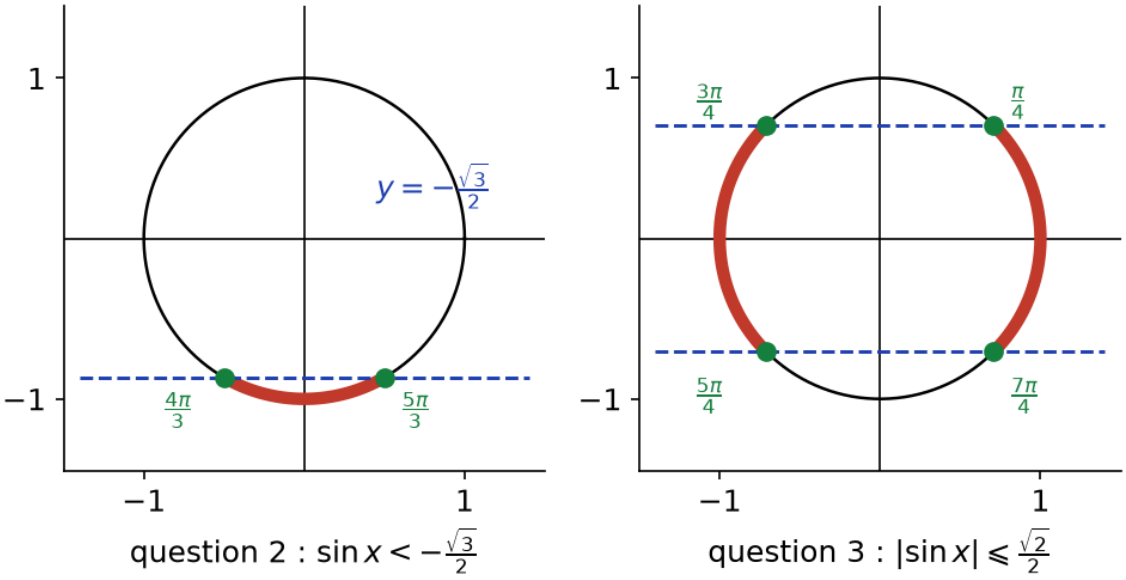
Point de méthode : ne divisez jamais par $\cos x$; factorisez, sinon vous perdez les solutions où $\cos x = 0$.

Corrigé de l'exercice 7 : Inéquations trigonométriques au cercle

1. L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\pm\frac{\pi}{3}$ dans $]-\pi, \pi]$. Le point $M(x)$ doit se trouver à droite de la droite $x = \frac{1}{2}$, sur l'arc qui contient I. **L'ensemble des solutions est** $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

2. Dans $[0, 2\pi[$, on a $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$. Le point $M(x)$ doit être strictement sous la droite horizontale $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, comme le montre la figure plus bas. **L'ensemble des solutions est** $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$.

3. L'inéquation équivaut à $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le point $M(x)$ doit rester entre les deux droites horizontales $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient deux arcs : l'un autour de I, l'autre autour du point d'abscisse curviligne π. **L'ensemble des solutions est** $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.



4. On pose $y = 2x$. Quand x décrit $]-\pi, \pi]$, y décrit $]-2\pi, 2\pi]$. Or $\cos y > \frac{1}{2}$ si et seulement si $y \in \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[$ pour un entier k. On intersecte avec $]-2\pi, 2\pi]$: pour $k = -1$, on obtient $\left]-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right[$; pour $k = 0$, $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$; pour $k = 1$, $\left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$. Le point $y = 2\pi$ convient, car $\cos 2\pi = 1$. On divise enfin par 2. **L'ensemble des solutions est** $\left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

5. La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Donc $\tan x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{4}$ sur cet intervalle. **L'ensemble des solutions est** $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Point de méthode : après un changement de variable $y = 2x$, l'intervalle d'étude double de longueur ; il faut donc chercher plusieurs arcs.

Corrigé de l'exercice 8 : Transformation de a cos x + b sin x

1. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $r > 0$. Le couple $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ vérifie $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$: c'est un point du cercle trigonométrique. Il existe donc φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Alors, par la formule d'addition, $r\cos(x - \varphi) = r\cos x \cos\varphi + r\sin x \sin\varphi$. **Ainsi,** $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$ **pour tout réel** x**.**

2. Ici $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ et $r = 2$. On cherche φ tel que $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ convient. Donc $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. L'équation devient $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. **Les solutions sont** $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ **et** $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **, avec** $k \in \mathbb{Z}$ **.**

3. Ici $r = \sqrt{9 + 16} = 5$. Soit φ tel que $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Alors $f(x) = 5\cos(x - \varphi)$. Comme le cosinus prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$, f prend toutes les valeurs de $[-5, 5]$. **Le maximum vaut** 5 **, atteint aux points** $\varphi + 2k\pi$ **; le minimum vaut** -5 **, atteint aux points** $\varphi + \pi + 2k\pi$ **.**

4. Ici $a = \sqrt{3}$, $b = -1$ et $r = 2$. On cherche φ avec $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, soit $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. L'inéquation s'écrit $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$, soit $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$. Quand x décrit $]-\pi, \pi]$, $u = x + \frac{\pi}{6}$ décrit $\left]-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$. Sur cet intervalle, $\cos u > \frac{1}{2}$ équivaut à $u \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$. **L'ensemble des solutions est** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right[$**.** Vérification : en $x = 0$, on a bien $\sqrt{3} > 1$.

Corrigé de l'exercice 9 : Linéarisation de produits

1. On écrit les formules d'addition :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En les additionnant, puis en les soustrayant, on obtient les deux premières formules. De même, on additionne $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. **Donc** $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ **et** $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

2. On applique ces formules :
   - $\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$;
   - $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos(-3x) - \cos 7x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$;
   - $\cos x \sin 4x = \sin 4x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x)$.

   Ce sont les trois linéarisations demandées.

3. D'abord, $\cos^3 x = \cos x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x \cos x}{2}$. Or $\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$. Donc $\cos^3 x = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 3x + \cos x}{4}$. Ensuite, $\sin^2 x \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2}\cos x = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 3x + \cos x}{4}$. **Ainsi,** $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$ **et** $\sin^2 x \cos x = \frac{\cos x - \cos 3x}{4}$**.**

4. Grâce à la question 3 :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{12}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

   De même, avec la question 2 :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos 3x - \cos 7x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}\right]_0^{\pi} = 0.$$

   Donc $I = \frac{2}{3}$ **et** $J = 0$**.**

Point de méthode : linéariser, c'est remplacer des produits et des puissances par des sommes de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$, dont on connaît les primitives.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 10 : Transformation de sommes en produits

1. Soient p et q deux réels. On pose $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte que $a+b = p$ et $a-b = q$. La formule $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ donne $\cos p + \cos q = 2\cos a \cos b$. Ensuite, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ donne $\cos q - \cos p = 2\sin a \sin b$. Enfin, $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ donne $\sin p + \sin q = 2\sin a \cos b$. **Donc** $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ **et** $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

2. On a $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$. L'équation équivaut donc à $\cos 2x = 0$ ou $\cos x = 0$. D'une part, $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donne $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. D'autre part, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **Les solutions sont** $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ **et** $\frac{\pi}{2} + k\pi$**, avec** $k \in \mathbb{Z}$**.**

3. On regroupe les termes extrêmes : $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$. L'équation devient $\sin 2x\ (2\cos x + 1) = 0$. D'abord, $\sin 2x = 0$ équivaut à $x = \frac{k\pi}{2}$. Ensuite, $\cos x = -\frac{1}{2}$ équivaut à $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **Les solutions sont** $\frac{k\pi}{2}$ **et** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$**, avec** $k \in \mathbb{Z}$**.**

4. On a $\cos x - \cos 5x = -2\sin 3x \sin(-2x) = 2\sin 3x \sin 2x$. Donc $\cos x = \cos 5x$ équivaut à $\sin 3x = 0$ ou $\sin 2x = 0$. Dans $[0, \pi]$, la première condition donne 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π ; la seconde donne 0, $\frac{\pi}{2}$, π. **Ainsi,** $\cos x - \cos 5x = 2\sin 3x \sin 2x$**, et l'ensemble des solutions est** $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$**.**

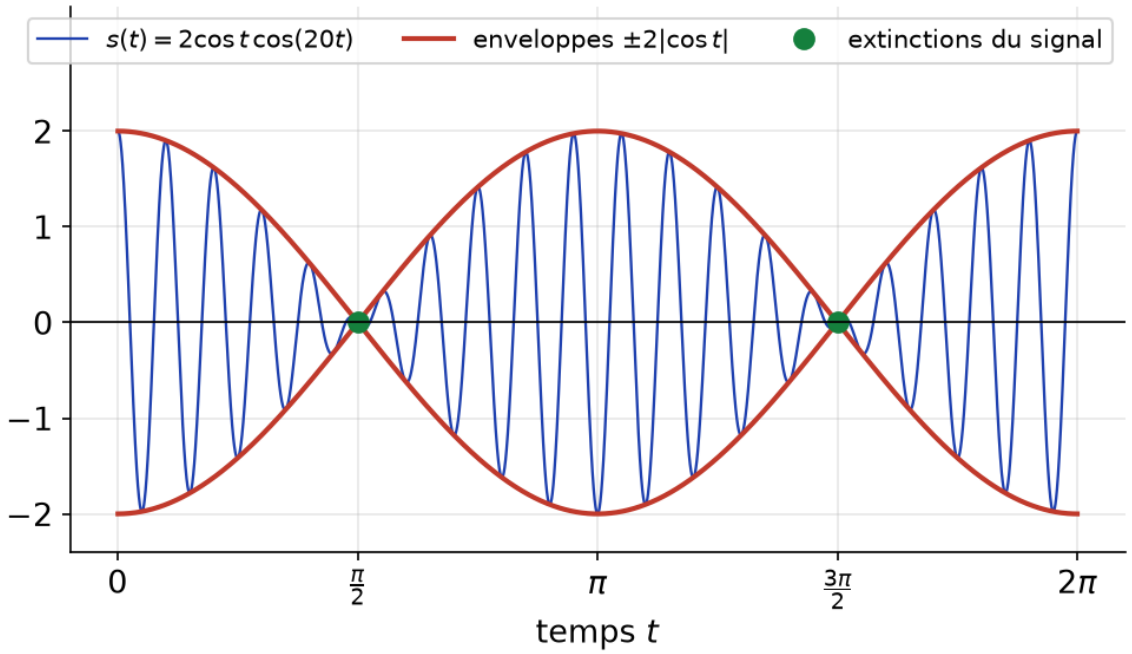
Corrigé de l'exercice 11 : Superposition de deux signaux et battements

1. On applique $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ avec $p = 21t$ et $q = 19t$. On a $\frac{p+q}{2} = 20t$ et $\frac{p-q}{2} = t$. **Donc** $s(t) = 2\cos t \cos(20t)$**.**

2. On a $s(t) = 0$ si et seulement si $\cos t = 0$ ou $\cos(20t) = 0$. Dans $[0, \pi]$,

$\cos t = 0$ donne $t = \frac{\pi}{2}$. Ensuite, $\cos(20t) = 0$ équivaut à $t = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{20}$, et la condition $0 \leq t \leq \pi$ impose $0 \leq k \leq 19$. Cela donne 20 valeurs. Or $\frac{\pi}{2}$ n'en fait pas partie, car $\frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{20} = \frac{\pi}{2}$ donnerait $2k + 1 = 20$. **Il y a donc 21 zéros dans $[0, \pi]$.**

3. Comme $|\cos(20t)| \leq 1$, on a $|s(t)| = 2|\cos t|\ |\cos(20t)| \leq 2|\cos t|$. L'égalité a lieu si et seulement si $\cos t = 0$ ou $|\cos(20t)| = 1$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $t = \frac{k\pi}{20}$. **Le signal oscille donc rapidement entre deux enveloppes $\pm 2|\cos t|$, qu'il touche aux instants $\frac{k\pi}{20}$.** Comme le montre la figure ci-dessous, l'amplitude s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.



4. Avec $p = 2\pi f_1 t$ et $q = 2\pi f_2 t$, on obtient $\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos(880\pi t)\cos(4\pi t)$. Le son a donc la fréquence moyenne 440 Hz, et son enveloppe $2|\cos(4\pi t)|$ s'annule quand $4\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $t = \frac{1}{8} + \frac{k}{4}$. Ces instants sont espacés de $\frac{1}{4}$ de seconde. **L'intensité s'annule 4 fois par seconde, c'est-à-dire $f_1 - f_2$ fois.**

Point de méthode : la fréquence des battements est la différence des fréquences ; c'est ainsi qu'un musicien accorde deux instruments à l'oreille.

Corrigé de l'exercice 12 : Fonction tangente et formule

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d'addition

1. On a $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ ,k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$, car $\cos x = 0$ équivaut à $\begin{matrix} x \equiv \frac{\pi}{2} \\ ,[\pi] \end{matrix}$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et stable par $x \to x + \pi$. D'abord, $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Ensuite, $\tan(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$. Enfin, la dérivée d'un quotient donne $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$. **La tangente est impaire, π-périodique, et $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.**

2. On a $\tan(a + b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$, avec un dénominateur $\cos(a + b)$ non nul. Comme $a, b \in D$, le produit $\cos a \cos b$ n'est pas nul ; on divise donc numérateur et dénominateur par ce produit. **On obtient** $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, le dénominateur étant non nul car égal à $\frac{\cos(a + b)}{\cos a \cos b}$.

3. Par la formule de soustraction, $\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$. On multiplie par la quantité conjuguée : $\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. De même, $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$. **Donc $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ et $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.** On note que leur produit vaut 1, ce qui est normal puisque $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$.

4. Avec $a = b = x$, pour x et $2x$ dans D, on a $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$. Posons $t = \tan \frac{\pi}{8}$, qui est strictement positif car $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, on obtient $1 = \frac{2t}{1 - t^2}$, donc $t^2 + 2t - 1 = 0$. Les racines sont $-1 \pm \sqrt{2}$, et seule $-1 + \sqrt{2}$ est positive. **Ainsi, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.**

5. On a $c = \pi - (a + b)$. Comme $c \in D$, le réel $a + b = \pi - c$ appartient aussi à D. Par conséquent, $\tan c = \tan(\pi - (a + b)) = -\tan(a + b) = -\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. On multiplie par $1 - \tan a \tan b$, qui est non nul :
$\tan c - \tan a \tan b \tan c = -\tan a - \tan b$. **Donc**
$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

Corrigé de l'exercice 13 : L'inégalité |sin x| ≤ |x| et ses conséquences

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. **Ainsi,** $\sin x \leq x$ **pour tout** $x \geq 0$**.**

2. Soit $x \geq 0$. Si $\sin x \geq 0$, alors $|\sin x| = \sin x \leq x$. Sinon, $\sin x < 0$, ce qui impose $x > \pi$, donc $|\sin x| \leq 1 < \pi < x$. Enfin, si $x < 0$, on applique ce qui précède à $-x$: $|\sin x| = |\sin(-x)| \leq -x = |x|$. **Donc** $|\sin x| \leq |x|$ **pour tout réel** x**.**

3. Par duplication, $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Ce nombre est positif, et la question 2 donne $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{4}$. **Par conséquent,** $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$**.**

4. D'après les formules somme-produit, $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$. Comme $|\cos| \leq 1$, on obtient $|\sin a - \sin b| \leq 2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|a-b|}{2}$. De même, $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, et la même majoration s'applique. **Ainsi,** $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$ **et** $|\cos a - \cos b| \leq |a-b|$**.**

5. Soit a un réel. Pour tout réel x, on a $|\sin x - \sin a| \leq |x - a|$. Quand x tend vers a, le majorant tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\sin x$ tend vers $\sin a$. Le même argument vaut pour le cosinus. **Les fonctions** $\sin$ **et** $\cos$ **sont donc continues en tout point de** $\mathbb{R}$**.**

Point de méthode : une inégalité du type $|f(x) - f(a)| \leq |x - a|$ donne la continuité de f sans aucun calcul de limite.

Corrigé de l'exercice 14 : Étude de la fonction x ↦ sin x (1 + cos x)

1. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques, donc f aussi. De plus, $f(-x) = -\sin x\ (1 + \cos x) = -f(x)$: f est impaire. Par périodicité, il suffit d'étudier f sur $[-\pi, \pi]$. Ensuite, par imparité, l'étude sur $[0, \pi]$ suffit : on complète par symétrie par

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

rapport à l'origine, puis par translation. **On étudie f sur $[0, \pi]$.**

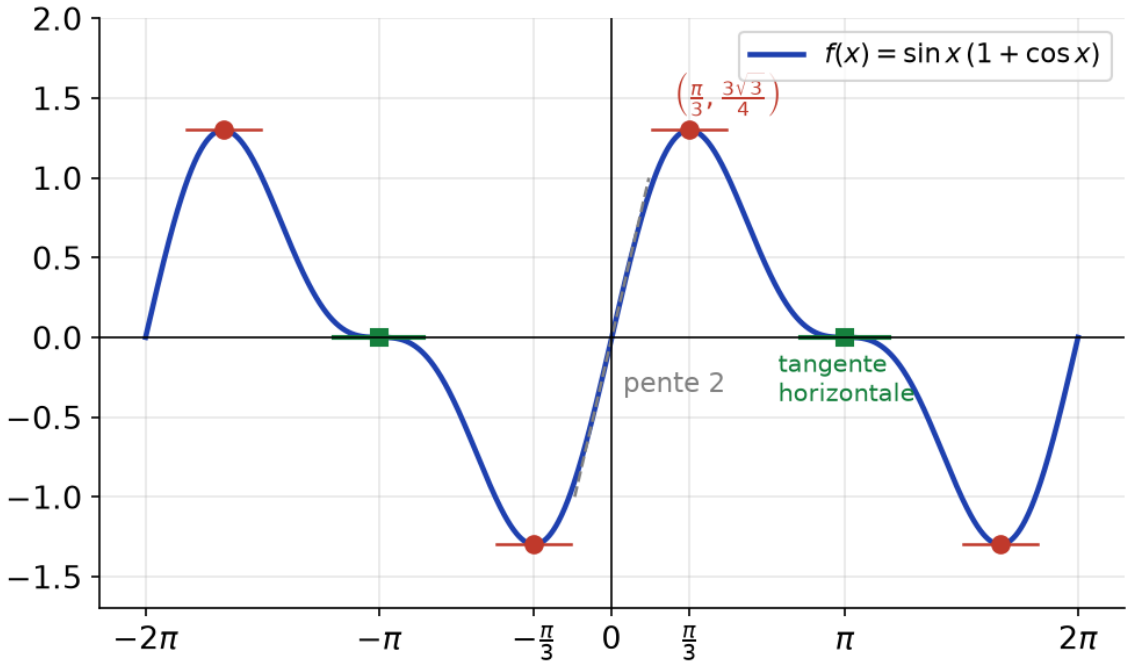
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la formule du produit :

$$f'(x) = \cos x\ (1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

Or $(2c-1)(c+1) = 2c^2 + 2c - c - 1 = 2c^2 + c - 1$. **Donc $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.**

3. Sur $[0, \pi]$, on a $\cos x + 1 \geq 0$, avec égalité seulement en π. Ensuite, $2\cos x - 1 > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ et $2\cos x - 1 < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, car le cosinus décroît sur $[0, \pi]$. Ainsi, f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. On calcule $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ et $f(\pi) = 0$. Enfin, $f'(0) = 1 \times 2 = 2$ et $f'(\pi) = (-3) \times 0 = 0$. **Le maximum sur $[0, \pi]$ vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ en $\frac{\pi}{3}$; la tangente est $y = 2x$ en 0, et horizontale en π.**

4. On complète la courbe par symétrie par rapport à l'origine, puis par translations de 2π. La figure ci-dessous représente f sur $[-2\pi, 2\pi]$ avec ses points remarquables. **Sur $\mathbb{R}$, le maximum de f vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ et son minimum vaut $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.**



5. Pour $x \in]0, \pi[$, on a $\sin x > 0$. Le segment $[PP']$ est vertical, de longueur $2\sin x$. La hauteur issue de A est la distance de A à la droite d'équation $X = \cos x$, soit $\cos x + 1$. L'aire vaut donc $\frac{1}{2} \times 2\sin x \times (1 + \cos x) = f(x)$. D'après la question 3, elle est maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$. Alors $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $PP' = \sqrt{3}$ et $AP^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$. **Le**

triangle d'aire maximale est équilatéral, de côté $\sqrt{3}$ et d'aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Substitution t = tan(x/2)

1. Comme $x \not\equiv \pi \ [2\pi]$, on a $\frac{x}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, donc $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et t est défini. De plus, $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$. Par duplication, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\,(1-t^2)$ et $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2t\cos^2\frac{x}{2}$. **On remplace $\cos^2\frac{x}{2}$ par $\frac{1}{1+t^2}$ et on obtient $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.**

2. D'abord, pour $x \equiv \pi \ [2\pi]$, on a $\cos x + 2\sin x = -1 \neq 2$: ces réels ne sont pas solutions. Pour les autres, on pose $t = \tan\frac{x}{2}$ et on multiplie par $1+t^2$:

$$1 - t^2 + 4t = 2 + 2t^2 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-1) = 0.$$

Si $t = 1$, alors $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Si $t = \frac{1}{3}$, soit α l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = \frac{1}{3}$; alors $x = 2\alpha + 2k\pi$. Vérification : pour $t = \frac{1}{3}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ et $\sin x = \frac{3}{5}$, et $\frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 2$. **Les solutions sont $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $2\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.**

3. Soit $x \not\equiv 0 \ [\pi]$. Alors $\sin x \neq 0$ et $x \not\equiv \pi \ [2\pi]$, donc $t = \tan\frac{x}{2}$ est défini et non nul. On calcule :

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2t^2}{2t} = t.$$

Ainsi, $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2}$.

4. Pour tout réel x, $2+\cos x \geq 1 > 0$, donc g est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \not\equiv \pi \ [2\pi]$, on a $2+\cos x = \frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2} = \frac{3+t^2}{1+t^2}$, donc $g(x) = \frac{2t}{3+t^2}$. Posons $h(t) = \frac{2t}{3+t^2}$ sur $\mathbb{R}$. Alors $h'(t) = \frac{2(3+t^2)-4t^2}{(3+t^2)^2} = \frac{2(3-t^2)}{(3+t^2)^2}$. Ainsi, h décroît sur $]-\infty, -\sqrt{3}]$,

croît sur $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, puis décroît, avec des limites nulles en $\pm\infty$. Son maximum vaut $h(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, et son minimum $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Par continuité, h prend toutes les valeurs de $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. De plus, $t = \tan\frac{x}{2}$ décrit tout $\mathbb{R}$, et $g(\pi) = 0$ est déjà dans cet intervalle. **L'ensemble des valeurs de g est $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, le maximum étant atteint en $x = \frac{2\pi}{3}$.** On vérifie : $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Point de méthode : la substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ oublie toujours les réels $x \underset{,[2\pi]}{\equiv} \pi$; testez-les à part.

Corrigé de l'exercice 16 : Sommes trigonométriques par télescopage

1. On utilise $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ avec $a = kx$ et $b = \frac{x}{2}$. **On obtient** $2\sin\frac{x}{2}\sin(kx) = \cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)$.

2. On somme pour k allant de 1 à n. La somme est télescopique :

$$2\sin\tfrac{x}{2}\ S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right] = \cos\tfrac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right).$$

   Ensuite, $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$, avec $\frac{p+q}{2} = \frac{(n+1)x}{2}$ et $\frac{p-q}{2} = -\frac{nx}{2}$. Donc $\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$. Enfin, $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ car $x \underset{,[2\pi]}{\not\equiv} 0$. **Ainsi,** $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

3. On utilise cette fois $2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, avec $a = kx$ et $b = \frac{x}{2}$. On obtient $2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)$. Par télescopage, $2\sin\frac{x}{2}\ C_n = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}$. Enfin, $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ donne $2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$. **Donc** $C_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

4. Les deux sinus du numérateur de S_n sont majorés par 1 en valeur absolue. **Par conséquent,**

$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ **pour tout** $n \geq 1$: les sommes partielles restent bornées, alors que $\sin(kx)$ ne tend pas vers 0.

5. Pour $n \geq 2$, on prend $x = \frac{\pi}{n} \in]0, \pi[$, qui n'est pas congru à 0 modulo 2π. Alors $\frac{nx}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(n+1)x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$. Donc $\sin\frac{(n+1)x}{2} = \cos\frac{\pi}{2n}$. **On obtient** $\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$. Vérification pour $n = 2$: $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = 1$, et $\frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = 1$.

Corrigé de l'exercice 17 : Un produit de cosinus et sa limite

1. Pour $n = 1$, la duplication donne $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$: la propriété est vraie. Supposons-la vraie au rang n. Comme $P_{n+1} = P_n \cos\frac{x}{2^{n+1}}$, on a :

$$2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\ P_{n+1} = 2^n\ P_n\left(2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^n\ P_n\ \sin\frac{x}{2^n} = \sin x.$$

Par récurrence, $2^n\sin\frac{x}{2^n}\ P_n = \sin x$ **pour tout** $n \geq 1$.

2. On a $0 < \frac{x}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\frac{x}{2^n} > 0$. **Ainsi,** $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.

3. On pose $u_n = \frac{x}{2^n}$, qui tend vers 0. Alors $2^n\sin\frac{x}{2^n} = x \cdot \frac{\sin u_n}{u_n}$, qui tend vers x. **Par conséquent,** P_n **tend vers** $\frac{\sin x}{x}$.

4. Pour $y \in [0, \pi]$, on a $\frac{y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\frac{y}{2} \geq 0$. De plus, $\cos^2\frac{y}{2} = \frac{1+\cos y}{2}$. D'où $\cos\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}$. Avec $x = \frac{\pi}{2}$, les facteurs de P_n sont $c_k = \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$. On a $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c_{k+1} = \sqrt{\frac{1+c_k}{2}}$. Si $c_k = \frac{a_k}{2}$, alors $c_{k+1} = \frac{\sqrt{2+a_k}}{2}$. On obtient ainsi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, et ainsi de suite. **D'après la question 3, leur produit tend vers** $\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$.

Point de méthode : un produit de cosinus d'angles divisés par 2 se simplifie en multipliant par le sinus du plus petit angle, puis en appliquant la duplication en cascade.

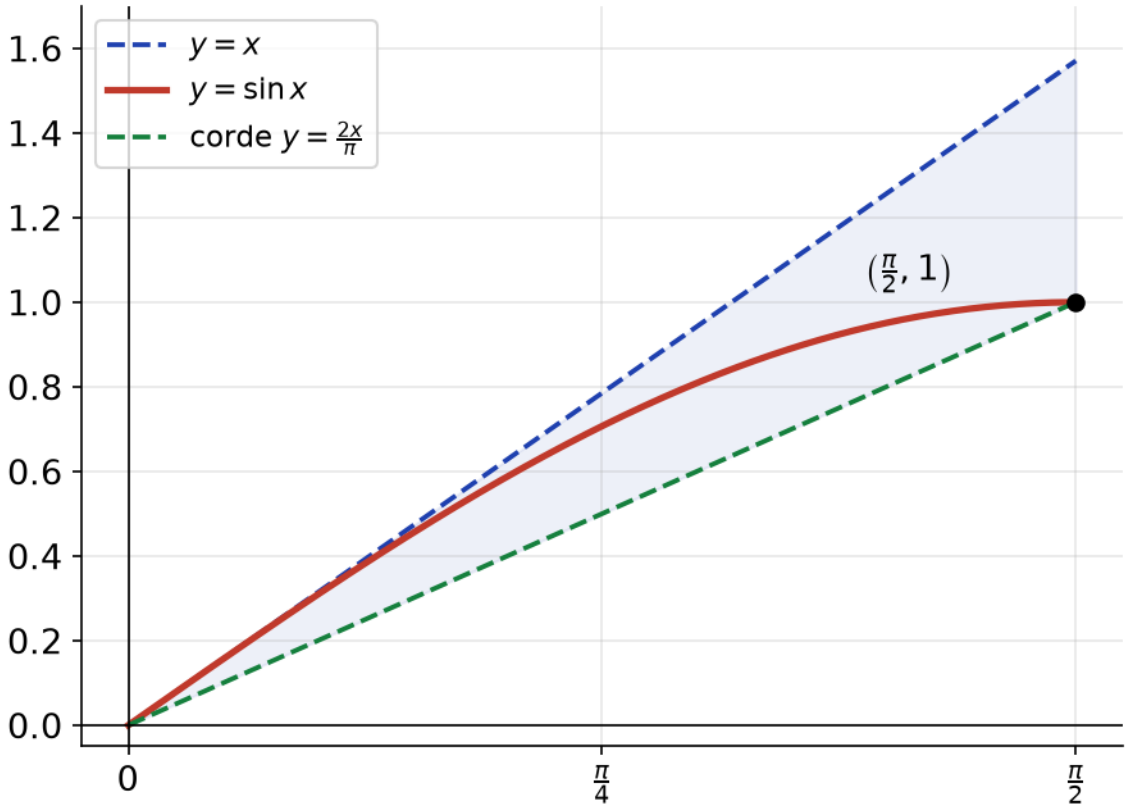
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 18 : Inégalité de Jordan

1. La fonction h est dérivable, avec $h'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$. Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x > 0$ et $\sin x > 0$, donc $h'(x) < 0$. Ainsi, h est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $h(0) = 0$, **on a** $h(x) < 0$ **pour tout** $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$**.**

2. La fonction g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} < 0$. **Donc** g **est strictement décroissante sur** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$**.**

3. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la décroissance donne $g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$, soit $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. Ensuite, $\sin x \leq x$ d'après l'exercice 13. Enfin, pour $x = 0$, tout vaut 0. **Ainsi,** $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ **sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**.** Graphiquement, la courbe du sinus reste au-dessus de sa corde entre $(0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, et sous sa tangente en 0, comme le montre la figure.



4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et la question 3 s'applique : $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **Donc** $\cos x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}$**.**

5. Pour $n \geq 2$, on a $\frac{\pi}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. La question 3 donne $\sin\frac{\pi}{n} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n}$. **Ainsi,** $\sin\frac{\pi}{n} \geq \frac{2}{n}$ **pour tout** $n \geq 2$**.**

Corrigé de l'exercice 19 : Problème : cos(2π/5) et le pentagone régulier

1. On a $5\theta = 2\pi$, donc $3\theta = 2\pi - 2\theta$. Par 2π -périodicité et parité du cosinus, $\cos 3\theta = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$. **Ainsi,** $\cos 3\theta = \cos 2\theta$**.**

2. D'après l'exercice 3, $\cos 3\theta = 4c^3 - 3c$ et $\cos 2\theta = 2c^2 - 1$. L'égalité précédente donne $4c^3 - 3c = 2c^2 - 1$. **Donc** c **est racine de** $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1$**.**

3. Le réel 1 est racine, car $4 - 2 - 3 + 1 = 0$. On cherche $(X-1)(4X^2 + \beta X + \gamma)$. En développant, on obtient $4X^3 + (\beta - 4)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma$. Par identification, $\gamma = -1$ et $\beta = 2$, et le coefficient de X vaut bien $-1 - 2 = -3$. **Donc** $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X-1)(4X^2 + 2X - 1)$**.**

4. Comme $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$, on a $c \neq 1$. Donc $4c^2 + 2c - 1 = 0$. Le discriminant vaut $4 + 16 = 20$, et les racines sont $\frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $c > 0$. Seule la racine $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ est positive. **Par conséquent,** $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$**.**

5. Par duplication, $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$. Donc $\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$. Or $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$, et $\cos\frac{\pi}{5} > 0$. Enfin, $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5}$. **Ainsi,** $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ **et** $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$**.**

6. Les abscisses sont 1, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ et $\cos 4\theta$. Or $\cos 4\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ et $\cos 3\theta = \cos 2\theta = \cos\frac{4\pi}{5}$. La somme vaut donc $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1-1-\sqrt{5}}{2} = 0$. **La somme des abscisses des sommets est bien nulle.**

7. On a $A_0A_1^2 = (1-c)^2 + \sin^2\theta = 1 - 2c + c^2 + \sin^2\theta = 2 - 2c$. Donc $A_0A_1^2 = 2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **Le côté du pentagone vaut** $A_0A_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}176$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Point de méthode : pour calculer $\cos\frac{2\pi}{n}$, on cherche une relation $\cos(p\theta) = \cos(q\theta)$ avec $p + q = n$, puis on la transforme en équation polynomiale en $\cos\theta$.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : les polynômes de Tchebychev

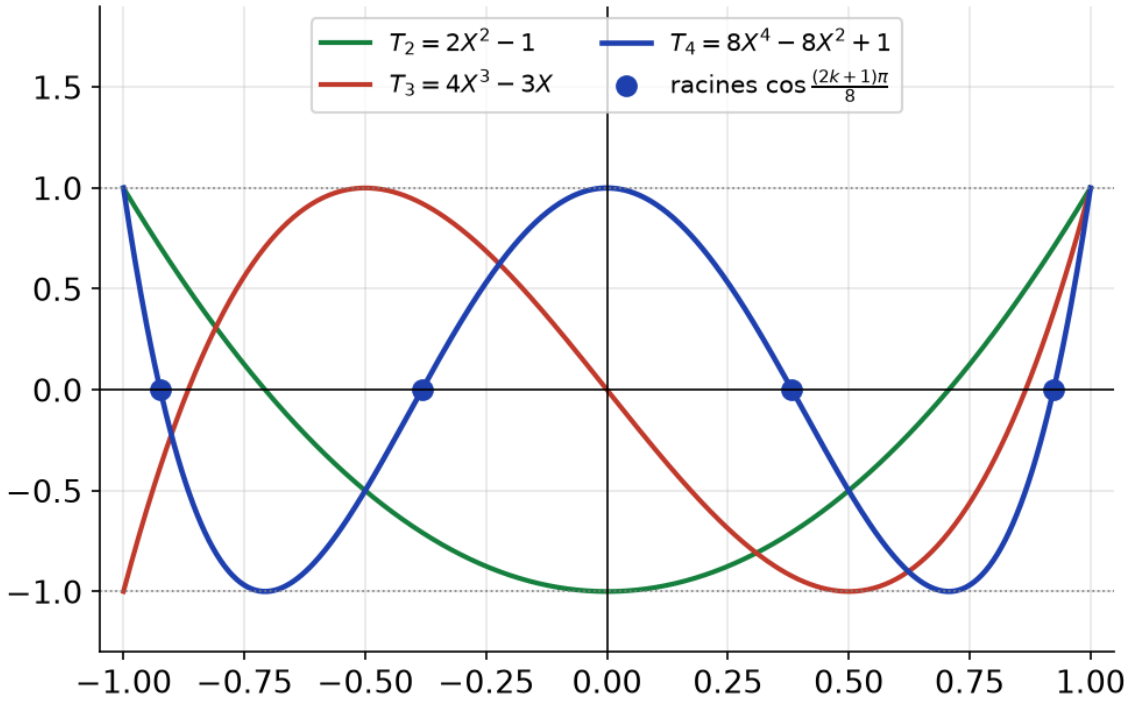
1. On applique $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ avec $p = (n+1)x$ et $q = (n-1)x$. On a $\frac{p+q}{2} = nx$ et $\frac{p-q}{2} = x$. **Donc** $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x\cos(nx)$**.**

2. On raisonne par récurrence double. Pour $n = 0$, $\cos 0 = 1 = T_0(\cos x)$. Pour $n = 1$, $\cos x = T_1(\cos x)$. Supposons la propriété vraie aux rangs $n-1$ et n, avec $n \geq 1$. La question 1 donne $\cos((n+1)x) = 2\cos x\ T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$. Le second membre vaut $T_{n+1}(\cos x)$, par définition de T_{n+1}. **Ainsi,** $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ **pour tout** $n \geq 0$ **et tout réel** x**.**

3. On calcule $T_2 = 2X \cdot X - 1 = 2X^2 - 1$, puis $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$. Ensuite, $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$. **Donc** $T_2 = 2X^2 - 1$**,** $T_3 = 4X^3 - 3X$ **et** $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$; on retrouve $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ de l'exercice 3.

4. Notons $\mathcal{H}_n$: « T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ». $\mathcal{H}_1$ est vraie, car $T_1 = X$ et $2^0 = 1$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un $n \geq 1$. Le polynôme $2XT_n$ est de degré $n+1$, de coefficient dominant $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. En outre, T_{n-1} est de degré $n-1 < n+1$: c'est $\mathcal{H}_{n-1}$ si $n \geq 2$, et $T_0 = 1$ si $n = 1$. La soustraction ne modifie donc pas le terme dominant. **Par récurrence,** T_n **est de degré** n **et de coefficient dominant** 2^{n-1} **pour tout** $n \geq 1$**.**

5. Pour $x \in [0, \pi]$, $\cos(nx) = 0$ équivaut à $nx = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. La condition $0 \leq x_k \leq \pi$ donne $0 \leq k \leq n-1$. Posons $y_k = \cos x_k$. Comme le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, les n réels y_k sont distincts et appartiennent à $]-1, 1[$. De plus, $T_n(y_k) = \cos(nx_k) = 0$. Enfin, un polynôme non nul de degré n a au plus n racines. **Les racines de** T_n **sont exactement les** n **réels** $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$**, pour** $0 \leq k \leq n-1$ **; il n'y en a pas d'autre.** La figure ci-dessous montre T_2, T_3, T_4 et les racines de T_4.



6. Pour $n = 4$, le plus grand des y_k est $y_0 = \cos\frac{\pi}{8}$. On résout $8y^4 - 8y^2 + 1 = 0$ en posant $Y = y^2$: $8Y^2 - 8Y + 1 = 0$, donc $Y = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. La plus grande racine positive est donc $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$. **On retrouve** $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Point de méthode : pour étudier un polynôme en $\cos x$, passez par la variable $x \in [0, \pi]$: le cosinus y est une bijection vers $[-1, 1]$.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : trigonométrie, cours de maths sup
- Les énoncés : exercices de maths sup sur trigonométrie

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- À maîtriser avant : Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités
- Chapitre précédent : Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités
- Chapitre suivant : Nombres complexes et exponentielle complexe
- Tester vos connaissances : QCM de maths sup par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths sup et les chapitres de maths spé